XIII Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W Świecie Matematyki"
im. Prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap pierwszy - 3 marca 2022 r.

Maksymalna liczba punktów do zdobycia: 80.

1. Pierwszy etap Konkursu składa się z 30 pytań testowych.
2. Każde z zadań 1-10 składa się z trzech niezależnych od siebie podpunktów. Każde z zadań 11-30 składa się z czterech niezależnych od siebie podpunktów. Do każdego z podpunktów należy udzielić odpowiedzi **TAK** (gdy potwierdzamy prawdziwość rozpatrywanego zdania) lub **NIE** (gdy uznajemy rozpatrywane zdanie za fałszywe), bądź pozostawić pole puste (w przypadku braku odpowiedzi). Po zakończeniu wypełniania testu, należy nanieść odpowiedzi w **KARCIE ODPOWIEDZI**. Punktacja za każde zadanie jest następująca:
   - **0 punktów** w przypadku udzielenia co najmniej jednej błędnej odpowiedzi na jeden z podpunktów zadania lub nieudzielenia odpowiedzi na żaden z podpunktów zadania;
   - **n-1 punktów** w przypadku, gdy udzieli się poprawnych odpowiedzi na n podpunktów w zadaniu i nie udzieli się żadnej błędnej odpowiedzi na którykolwiek z podpunktów w zadaniu.
3. Zabrania się korzystania z korektora. W przypadku pomyłki w teście odpowiedź należy przekreślić, zaś nową odpowiedź zaznaczyć po lewej stronie miejsca przeznaczonego na odpowiedź.
4. Dozwolone jest korzystanie z "Zestawu wybranych wzorów matematycznych".
5. Zabrania się korzystania z kalkulatora.
6. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnej pracy uczestnika Konkursu (poza korzystaniem z tablic matematycznych wymienionych w punkcie 4) zostaje on wykluczony z Konkursu.

Oznaczenia i definicje

Symbolem $\mathbb{R}$ oznaczamy zbiór liczb rzeczywistych.

Symbolem $\mathbb{Q}$ oznaczamy zbiór liczb wymiernych.

Symbolem $\mathbb{N}$ oznaczamy zbiór liczb naturalnych. Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną.

Dla takich liczb rzeczywistych a, b, że $a < b$ przez $[a, b]$ oznaczymy przedział domknięty o początku a i końcu b.

Niech X, Y będą zbiorami, a $f : X \to Y$ będzie funkcją. Dla $A \subset X$, $C \subset Y$ definiujemy

$$f[A] \coloneqq \{y \in Y : y = f(x) \text{ dla pewnego } x \in A\},$$

$$f^{-1}[C] \coloneqq \{x \in X : f(x) \in C\}.$$

Niech $X \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem, a $g : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Powiemy, że funkcja g jest:

(a) *ograniczona z góry*, jeśli istnieje taka liczba $M \in \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $g(x) < M$;

(b) *ograniczona z dołu*, jeśli istnieje taka liczba $M \in \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $g(x) > M$;

(c) *ograniczona*, jeśli istnieje taka liczba $M \in \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $|g(x)| < M$.

Zadanie 1. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

[ ] Dla dowolnych liczb wymiernych q_1, q_2 i dowolnych liczb niewymiernych a, b liczba $q_1 a + q_2 b$ jest liczbą niewymierną.

[ ] Granica dowolnego ciągu liczb wymiernych jest liczbą wymierną.

[ ] Niech a, b będą różnymi liczbami niewymiernymi. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która przyjmuje wartość a dla argumentów będących liczbami niewymiernymi oraz b dla argumentów będących liczbami wymiernymi, jest ciągła.

Zadanie 2. Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych jest *ograniczony*, jeśli istnieje liczba rzeczywista $M \geq 0$ spełniająca nierówność $|x_n| < M$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Czy dla dowolnych ciągów liczb rzeczywistych $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prawdą jest, że:

[ ] jeżeli $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem zbieżnym, to $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są ciągami zbieżnymi;

[ ] jeżeli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, to jest ograniczony;

[ ] jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny oraz $a_n \in [0, 1]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $\lim_{n\to\infty} a_n \in [0, 1]$?

Zadanie 3. Dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ niech $\sum_{i=1}^{n} a_i \coloneqq a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

[ ] Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

[ ] Jeżeli $|q| < 1$, to $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q}{1-q}$.

[ ] Niech $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ oraz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem ściśle rosnącym o wyrazach z $[a, b]$. Istnieje funkcja monotoniczna na przedziale $[a, b]$ która jest nieciągła tylko i dokładnie w punktach x_n.

Zadanie 4. Oceń czy dla dowolnej liczby pierwszej $p > 3$ poniższe zdania są prawdziwe.

[ ] $p^2 - 1$ jest podzielne przez 24.

[ ] $p^2 + 2$ nie jest liczbą pierwszą.

[ ] $\mathrm{NWD}(p + 1, p^2 + 1) = 2$.

Zadanie 5. Dla $x \in \mathbb{R}$ niech $f(x) = \mathrm{a}x^3 + \mathrm{b}x^2 + \mathrm{c}x + \mathrm{d}$, gdzie $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d} \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

[ ] Istnieje takie $x_0 \in \mathbb{R}$, że $f(x_0) = 0$.

[ ] Jeżeli $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}$ są różnymi liczbami niewymiernymi, to funkcja f nie posiada wymiernych miejsc zerowych.

[ ] Jeśli $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ są różnymi miejscami zerowymi funkcji f, to $x_1x_2x_3 = \frac{-\mathrm{d}}{\mathrm{a}}$

Zadanie 6. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem o wyrazach z przedziału $(0, 1)$. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

[ ] Granica $\sum_{i=1}^{n} a_i$ istnieje i jest skończona.

[ ] Granica $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_i$ istnieje i jest skończona.

[ ] Jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, to granica $\sum_{i=1}^{n} a_i$ istnieje i jest skończona.

Zadanie 7. Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych i załóżmy, że $y_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R}$. Oceń prawdziwość poniższych zdań:

[ ] $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - y_n| = |a - b|$;

[ ] jeśli $b \neq 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$;

[ ] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} = a$.

Zadanie 8. Oceń, czy dana liczba jest wymierna.

[ ] $\log_2(\sqrt[3]{4})$

[ ] $\log_5(555)$

[ ] $7^{\frac{\log_5(3)}{2\log_5(7)}}$

Zadanie 9. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Oceń, czy dla dowolnej takiej funkcji ciągłej $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, że $f(b) = 1$ oraz $f(c) = -1$ dla pewnego $c \in (a, b]$ prawdziwe są zdania:

[ ] funkcja f ma miejsce zerowe;

[ ] funkcja f jest ograniczona;

[ ] funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą lub największą.

Zadanie 10. Oceń, czy dla dowolnych zbiorów A, B, C prawdziwe są poniższe zdania.

[ ] Jeżeli $A \cup B = B$, to $A \supset B$.

[ ] Jeżeli $A \cup B = A \cup C$, to $B = C$.

[ ] Jeżeli $A \neq B$, to $C \setminus B \neq C \setminus A$.

Zadanie 11. Niech $n, m \in \mathbb{N}$. Powiemy, że n i m są względnie pierwsze, jeżeli $\mathrm{NWD}(n, m) = 1$. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

[ ] Dowolna liczba pierwsza jest względnie pierwsza ze wszystkimi innymi liczbami naturalnymi.

[ ] Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych które są z nią względnie pierwsze.

[ ] Jeżeli $n, m \in \mathbb{N}$ są względnie pierwsze, to $\mathrm{NWW}(n, m) = nm$.

[ ] Jeżeli $n, m \in \mathbb{N}$ są względnie pierwsze i $m > n$, to $m^3 - n^3$ i $m^3 + n^3$ również są względnie pierwsze.

Zadanie 12. Dla dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ definiujemy działanie $\bullet_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem $x \bullet_n y \coloneqq xy + nx + ny$. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

[ ] Równanie $x \bullet_1 x = -1$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

[ ] Równanie $x \bullet_2 x = -2$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

[ ] Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $x \bullet_n y = y \bullet_n x$.

[ ] Istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzą równości

$$(x + z) \bullet_n y = (x \bullet_n y) + (z \bullet_n y),$$

$$x \bullet_n (y + z) = (x \bullet_n y) + (x \bullet_n z).$$

Zadanie 13.

Niech $a_0, a_1, \ldots, a_{2022} \in \mathbb{R}$, $a_{2022} \neq 0$. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$f(x) \coloneqq a_{2022}x^{2022} + a_{2021}x^{2021} + ... + a_1x + a_0 \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

Oceń prawdziwość poniższych zdań:

[ ] funkcja $f'(x)$ posiada przynajmniej jedno miejsce zerowe;

[ ] $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$;

[ ] $\frac{1}{2021!} f^{(2021)}(0) = a_{2021}$, gdzie $f^{(2021)}$ oznacza pochodną rzędu 2021;

[ ] $f(-1)$ jest liczbą wymierną.

Zadanie 14. Definicja ciągu ograniczonego pojawia się w zadaniu 2. Oceń, czy dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżnego do 0 i dowolnego ciągu ograniczonego $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prawdą jest, że:

[ ] ciąg $(e^{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony;

[ ] ciąg $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony;

[ ] ciąg $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny;

[ ] ciąg $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny ?

Zadanie 15. Oceń, czy dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, ..., x_{2022}, y_1, ..., y_{2022}$ prawdziwe są nierówności:

[ ] $\max\limits_{i=1,...,2022} |x_i + y_i| \le \max\limits_{i=1,...,2022} |x_i| + \max\limits_{i=1,...,2022} |y_i|$;

[ ] $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{2022} x_i^2} \le \sum\limits_{i=1}^{2022} |x_i|$;

[ ] $\sum\limits_{i=1}^{2022} |y_i| \le \sqrt{2022} \max\limits_{i=1,...,2022} |y_i|$;

[ ] $\sum\limits_{i=1}^{2022} |x_i| \le \sqrt{2022} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{2022} x_i^2}$.

Zadanie 16. Niech x będzie resztą z dzielenia liczby $2^5 + 2^{5^2} + 2^{5^3} + \cdots + 2^{5^{20}}$ przez 5. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

[ ] x jest podzielna przez 3.

[ ] $3x$ jest podzielna przez 40.

[ ] x jest liczbą pierwszą.

[ ] $x^2 > 10$.

Zadanie 17. $\sin \frac{\pi}{12}$ wynosi

[ ] $-2\cos\frac{\pi}{36} + 1$;

[ ] $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{4}$;

[ ] $3\sin\frac{\pi}{36} - 4\sin^3\frac{\pi}{36}$;

[ ] $2\sin\frac{\pi}{24}$.

Zadanie 18. Oceń, czy dla dowolnych x, y niewymiernych i dowolnego p wymiernego prawdziwe są poniższe zdania:

[ ] $x + y$ jest liczbą niewymierną;

[ ] $x+p$ jest liczbą niewymierną;

[ ] xy jest liczbą niewymierną;

[ ] xp jest liczbą niewymierną.

Zadanie 19. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) := \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$. Oceń prawdziwość poniższych zdań:

[ ] funkcja f jest ciągła w zerze;

[ ] funkcja f jest ograniczona;

[ ] funkcja f ma granicę w zerze;

[ ] $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Zadanie 20. Wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych o cyfrach ze zbioru $\{4,5,6,7,8,9\}$, w których zapisie dziesiętnym każda z dopuszczalnych cyfr występuje co najmniej raz jest:

[ ] $7!$;

[ ] $\frac{7!}{2}$;

[ ] $\binom{7}{2} \cdot 6!$;

[ ] $7! \cdot 3$.

Zadanie 21. *Różnicą symetryczną* zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Oceń, czy dla dowolnych niepustych zbiorów A, B, C prawdziwe są poniższe zdania:

[ ] $\{1,2,3,5,8,9\} \triangle \{2,3,4,7,8,9\} = \{1,4,5,7\}$;

[ ] $A \triangle \emptyset = \emptyset$;

[ ] $A \triangle B = B \triangle A$;

[ ] $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Zadanie 22. Niech $n \in \{3,4,\dots\}$. Rzucamy $2n$ razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo wyrzucenia łącznie dokładnie n orłów jest równe

[ ] $\frac{1}{2^{2n}}$;

[ ] $2\frac{n!}{n! \cdot n! \cdot 2^{2n}}$;

[ ] $\binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$;

[ ] $\frac{1}{2^n}$.

Zadanie 23. Cyfra jedności w zapisie dziesiętnym liczby 7^{2022} jest

[ ] liczbą pierwszą;

[ ] pierwiastkiem kwadratowym liczby mniejszej od 50;

[ ] podzielna przez 3;

[ ] równa 1.

Zadanie 24. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

[ ] Wśród wszystkich 10978 studentów Politechniki Łódzkiej istnieje taka dwójka, która ma dokładnie tyle samo znajomych studentów Politechniki Łódzkiej (zakładamy, że jeśli A zna B, to B zna A).

[ ] W dowolnym 232-elementowym podzbiorze zbioru liczb całkowitych istnieją dwie takie liczby, których suma jest podzielna przez 561.

[ ] Dla dowolnego zbioru X składającego się z 10 liczb naturalnych mniejszych od 100, istnieją takie dwa niepuste i rozłączne podzbiory X, że suma elementów pierwszego podzbioru jest równa sumie elementów drugiego podzbioru.

[ ] Jeżeli każdy punkt okręgu pomalujemy na jeden z dwóch kolorów, to istnieje trójkąt równoramienny wpisany w ten okrąg, który wszystkie wierzchołki ma tego samego koloru.

Zadanie 25. Na stole leżą 32 bierki. Dwóch graczy zabiera bierki ze stołu kierując się poniższymi zasadami:

1. Gracze wykonują ruchy na zmianę.
2. W swoim ruchu gracz musi zabrać 1 lub 2 bierki.
3. Wygrywa ten gracz, który zabierze ostatnią bierkę.

Zakładamy, że zaczyna gracz A, a po nim ruch ma gracz B. Oceń prawdziwość zdań:

[ ] Jeśli gracz A zacznie od zabrania 1 bierki, to istnieje strategia wygrywająca dla gracza B.

[ ] Jeśli gracz A zacznie od zabrania 2 bierek, to istnieje strategia wygrywająca dla gracza B.

[ ] Zawsze istnieje strategia wygrywająca dla gracza B.

[ ] Zawsze istnieje strategia wygrywająca dla gracza A.

Zadanie 26. Oceń, czy dla dowolnych zbiorów X, Y, funkcji $f : X \to Y$ i dowolnych $A, B \subset X$, $C, D \subset Y$ zachodzą poniższe równości:

[ ] $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$;

[ ] $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$;

[ ] $f^{-1}[C \cup D] = f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D]$;

[ ] $f^{-1}[C \cap D] = f^{-1}[C] \cap f^{-1}[D]$.

Zadanie 27. Niech X będzie niepustym skończonym zbiorem, a $\mathcal{F}$ zbiorem tych funkcji $f : X \to X$, które są *suriektywne*, tj. $f[X] = X$. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

[ ] Dla każdej funkcji $f \in \mathcal{F}$ istnieje taka funkcja $g \in \mathcal{F}$, że $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ dla każdego $x \in X$.

[ ] Dla każdej funkcji $f \in \mathcal{F}$ istnieje taka funkcja $h \in \mathcal{F}$, że $f(h(x)) = f(x)$ dla każdego $x \in X$.

[ ] Zbiór $\mathcal{F}$ jest właściwym pozbiorem zbioru wszystkich bijekcji (funkcji, które są jednocześnie suriektywne i różnowartościowe) z X na X.

[ ] Dla każdej funkcji $f \in \mathcal{F}$ istnieje taka funkcja $h \in \mathcal{F}$, że $h(f(x)) = f(x)$ dla każdego $x \in X$.

Zadanie 28. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ będą takie, że $a < b$. Oceń, czy dla każdej funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ prawdziwe są poniższe zdania.

[ ] Jeśli f jest funkcją rosnącą, to $f[[a, b]] \subset [f(a), f(b)]$.

[ ] Jeśli f jest funkcją rosnącą, to $f[[a, b]] \supset [f(a), f(b)]$.

[ ] Jeśli f jest funkcją ciągłą i $f(a) < f(b)$, to $f[[a, b]] \subset [f(a), f(b)]$.

[ ] Jeśli f jest funkcją ciągłą i $f(a) < f(b)$, to $f[[a, b]] \supset [f(a), f(b)]$.

Zadanie 29. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \wedge |y| < 1\}$ oraz $f : A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem

$$f(x, y) := \frac{y}{1 - x}.$$

Oceń, czy funkcja f jest

[ ] ograniczona z góry;

[ ] ograniczona z dołu;

[ ] ograniczona;

[ ] różnowartościowa.

Zadanie 30. Niech $A \subset \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Powiemy, że punkt $(a, b) \in A$ jest *najlepszym przybliżeniem* punktu (x, y) w zbiorze A, jeżeli

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leqslant \sqrt{(x-u)^2 + (y-w)^2} \text{ dla każdego } (u, v) \in A.$$

Oceń prawdziwość zdania "istnieje dokładnie jedno najlepsze przybliżenie punktu (x, y) w zbiorze A" dla:

[ ] $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 < 1\}$, $(x, y) = (1, 1)$;

[ ] $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\} \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, $(x, y) = (1, 1)$;

[ ] $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = 1\}$, $(x, y) = (0, 0)$;

[ ] $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = a^3 + 2a^2 - 7a - 2\}$, $(x, y) = (2, 0)$.

KARTA ODPOWIEDZI

XIII Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W Świecie Matematyki"
im. Prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap pierwszy - 3 marca 2022 r.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30