Finansowanie marzeń

dr inż. Violetta Lipińska

Instytut Matematyki
Politechnika Łódzka

Łódź, 8 marca 2022

https://www.extradom.pl/projekt-domu-sezam-WOF1026

https://pixabay.com/pl/photos/dom-basen-projektowanie-wnętrz-1477041/

https://pixabay.com/pl/photos/plaża-raj-palmy-morze-święto-1921598/

Podstawowe pojęcia teorii procentu:

Podstawowe pojęcia teorii procentu:

- **kapitał** (ang. *principal*) – początkowa kwota pieniędzy, które będziemy inwestowali;

Podstawowe pojęcia teorii procentu:

- **kapitał** (ang. *principal*) – początkowa kwota pieniędzy, które będziemy inwestowali;
- **kwota zakumulowana** (ang. *accumulated value*) – kwota uzyskana po pewnym okresie inwestycji;

Podstawowe pojęcia teorii procentu:

- **kapitał** (ang. *principal*) – początkowa kwota pieniędzy, które będziemy inwestowali;
- **kwota zakumulowana** (ang. *accumulated value*) – kwota uzyskana po pewnym okresie inwestycji;
- **kwota odsetek** lub po prostu **odsetki** (ang. *interest*) – różnica między dwiema powyższymi wartościami;

Podstawowe pojęcia teorii procentu:

- **kapitał** (ang. *principal*) – początkowa kwota pieniędzy, które będziemy inwestowali;
- **kwota zakumulowana** (ang. *accumulated value*) – kwota uzyskana po pewnym okresie inwestycji;
- **kwota odsetek** lub po prostu **odsetki** (ang. *interest*) – różnica między dwiema powyższymi wartościami;
- **funkcja akumulacji** (ang. *accumulation function*) – funkcja opisująca przyrost kapitału 1 [j.m.] w czasie.

Własności funkcji akumulacji:

Własności funkcji akumulacji:

- $a(0) = 1$,

Własności funkcji akumulacji:

- $a(0) = 1$,
- funkcja rosnąca lub niemalejąca,

Własności funkcji akumulacji:

- $a(0) = 1$,
- funkcja rosnąca lub niemalejąca,
- jeśli odsetki gromadzone są w sposób ciągły, to funkcja akumulacji jest również funkcją ciągłą. W przypadku, gdy odsetki gromadzą się co pewien czas, funkcja akumulacji ma punkty nieciągłości.

Funkcja opisująca wartości kapitału zdefiniowana jest następująco:

$$A(t) = K \cdot a(t),$$

gdzie:
– $a(t)$ jest funkcją akumulacji,
– K jest kapitałem początkowym.

Funkcja opisująca wartości kapitału zdefiniowana jest następująco:

$$A(t) = K \cdot a(t),$$

gdzie:
– $a(t)$ jest funkcją akumulacji,
– K jest kapitałem początkowym.
Własności funkcji $A(t)$:

Funkcja opisująca wartości kapitału zdefiniowana jest następująco:

$$A(t) = K \cdot a(t),$$

gdzie:
– $a(t)$ jest funkcją akumulacji,
– K jest kapitałem początkowym.
Własności funkcji $A(t)$:

- $A(0) = K$,

Funkcja opisująca wartości kapitału zdefiniowana jest następująco:

$$A(t) = K \cdot a(t),$$

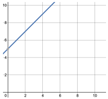
gdzie:
– $a(t)$ jest funkcją akumulacji,
– K jest kapitałem początkowym.
Własności funkcji $A(t)$:

- $A(0) = K$,
- dwie pozostałe własności są takie same jak własności funkcji akumulacji $a(t)$.

Przykłady funkcji $A(t)$:

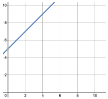
Przykłady funkcji $A(t)$:

- Liniowa: $A(t) = \frac{1}{2}t + 5$

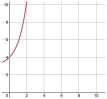


Przykłady funkcji $A(t)$:

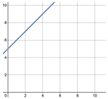
- Liniowa: $A(t) = \frac{1}{2}t + 5$



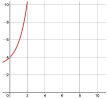
- Wykładnicza: $A(t) = e^{t} + 3$



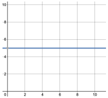
Przykłady funkcji $A(t)$:



- Liniowa: $A(t) = \frac{1}{2}t + 5$



- Wykładnicza: $A(t) = e^t + 3$



- Stała: $A(t) = 5$

Najczęściej używane funkcje akumulacji $a(t)$:

Najczęściej używane funkcje akumulacji $a(t)$:

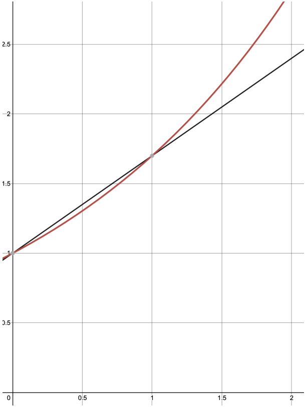
- Oprocentowanie proste: $a(t) = 1 + it$

Najczęściej używane funkcje akumulacji $a(t)$:

- Oprocentowanie proste: $a(t) = 1 + it$
- Oprocentowanie złożone: $a(t) = (1 + i)^t$

Najczęściej używane funkcje akumulacji $a(t)$:

- Oprocentowanie proste: $a(t) = 1 + it$
- Oprocentowanie złożone: $a(t) = (1 + i)^t$



Wszystkie inwestycje porównujemy pod kątem ich wartości obecnej (ang. *present value*), czyli wartości jaką ma dana inwestycja w obecnej chwili.

Wszystkie inwestycje porównujemy pod kątem ich wartości obecnej (ang. *present value*), czyli wartości jaką ma dana inwestycja w obecnej chwili.

Pytanie:

Wszystkie inwestycje porównujemy pod kątem ich wartości obecnej (ang. *present value*), czyli wartości jaką ma dana inwestycja w obecnej chwili.

Pytanie: Jaką kwotę K musimy zainwestować w chwili obecnej, czyli dzisiaj, aby za 1 rok mieć 1 [j.m.]?

Wszystkie inwestycje porównujemy pod kątem ich wartości obecnej (ang. *present value*), czyli wartości jaką ma dana inwestycja w obecnej chwili.

Pytanie: Jaką kwotę K musimy zainwestować w chwili obecnej, czyli dzisiaj, aby za 1 rok mieć 1 [j.m.]?

Odpowiedź:

Wszystkie inwestycje porównujemy pod kątem ich wartości obecnej (ang. *present value*), czyli wartości jaką ma dana inwestycja w obecnej chwili.

Pytanie: Jaką kwotę K musimy zainwestować w chwili obecnej, czyli dzisiaj, aby za 1 rok mieć 1 [j.m.]?

Odpowiedź: To zależy od funkcji akumulacji.

Wszystkie inwestycje porównujemy pod kątem ich wartości obecnej (ang. *present value*), czyli wartości jaką ma dana inwestycja w obecnej chwili.

Pytanie: Jaką kwotę K musimy zainwestować w chwili obecnej, czyli dzisiaj, aby za 1 rok mieć 1 [j.m.]?

Odpowiedź: To zależy od funkcji akumulacji.

W przypadku oprocentowania złożonego, gdy $a(t) = (1+i)^t$, należy rozwiązań równanie

$$1 = K \cdot (1+i)^1,$$

Wszystkie inwestycje porównujemy pod kątem ich wartości obecnej (ang. *present value*), czyli wartości jaką ma dana inwestycja w obecnej chwili.

Pytanie: Jaką kwotę K musimy zainwestować w chwili obecnej, czyli dzisiaj, aby za 1 rok mieć 1 [j.m.]?

Odpowiedź: To zależy od funkcji akumulacji.

W przypadku oprocentowania złożonego, gdy $a(t) = (1+i)^t$, należy rozwiązań równanie

$$1 = K \cdot (1+i)^1,$$

czyli

$$K = \frac{1}{1+i}.$$

Kolejne pytanie:

Kolejne pytanie: Ile musimy zainwestować w chwili obecnej, czyli dzisiaj, aby za 2 lata mieć 1 [j.m.]?

Kolejne pytanie: Ile musimy zainwestować w chwili obecnej, czyli dzisiaj, aby za 2 lata mieć 1 [j.m.]?
Aby odpowiedzieć na powyższe pytanie w przypadku oprocentowania złożonego, czyli gdy $a(t) = (1 + i)^t$, należy rozwiązać równanie

$$1 = K \cdot (1 + i)^2,$$

Kolejne pytanie: Ile musimy zainwestować w chwili obecnej, czyli dzisiaj, aby za 2 lata mieć 1 [j.m.]?
Aby odpowiedzieć na powyższe pytanie w przypadku oprocentowania złożonego, czyli gdy $a(t) = (1 + i)^t$, należy rozwiązać równanie

$$1 = K \cdot (1 + i)^2,$$

czyli

$$K = \frac{1}{(1 + i)^2}.$$

Kolejne pytanie: Ile musimy zainwestować w chwili obecnej, czyli dzisiaj, aby za 2 lata mieć 1 [j.m.]?
Aby odpowiedzieć na powyższe pytanie w przypadku oprocentowania złożonego, czyli gdy $a(t) = (1+i)^t$, należy rozwiązać równanie

$$1 = K \cdot (1+i)^2,$$

czyli

$$K = \frac{1}{(1+i)^2}.$$

Wniosek:

Kolejne pytanie: Ile musimy zainwestować w chwili obecnej, czyli dzisiaj, aby za 2 lata mieć 1 [j.m.]?
Aby odpowiedzieć na powyższe pytanie w przypadku oprocentowania złożonego, czyli gdy $a(t) = (1+i)^t$, należy rozwiązać równanie

$$1 = K \cdot (1+i)^2,$$

czyli

$$K = \frac{1}{(1+i)^2}.$$

Wniosek: Aby za n lat mieć 1 [j.m.], należy dzisiaj zainwestować kwotę

$$K = \frac{1}{(1+i)^n},$$

gdy $a(t) = (1+i)^t$.

Dyskontowanie jest czynnością odwrotną do procesu akumulacji. Odpowiada zatem na pytanie postawione na poprzednim slajdzie: Ile musimy zainwestować w chwili obecnej, czyli dzisiaj, aby za n lat mieć 1 [j.m.]?

Rozważmy funkcję akumulacji postaci $a(t) = (1+i)^t$ i zdefiniujmy

Dyskontowanie jest czynnością odwrotną do procesu akumulacji. Odpowiada zatem na pytanie postawione na poprzednim slajdzie: Ile musimy zainwestować w chwili obecnej, czyli dzisiaj, aby za n lat mieć 1 [j.m.]?
Rozważmy funkcję akumulacji postaci $a(t) = (1 + i)^t$ i zdefiniujmy

współczynnik dyskonta

$$v = \frac{1}{1 + i}$$

Dyskontowanie jest czynnością odwrotną do procesu akumulacji. Odpowiada zatem na pytanie postawione na poprzednim slajdzie: Ile musimy zainwestować w chwili obecnej, czyli dzisiaj, aby za n lat mieć 1 [j.m.]?

Rozważmy funkcję akumulacji postaci $a(t) = (1+i)^t$ i zdefiniujmy

współczynnik dyskonta

$$v = \frac{1}{1+i}$$

oraz

funkcję dyskontującą

$$v(t) = \frac{1}{a(t)} = \frac{1}{(1+i)^t} = v^t.$$

Renta pewna płatna z dołu – jest to renta płatna na koniec każdego okresu, gdzie płatność dokonywana jest w kwocie 1 [j.m] i trwa przez n okresów (ang. *annuity–immediate*). W takiej rencie mamy **pewne** dokonanie **wszystkich** ustalonych płatności.

Dla takiej renty wartość obecna wszystkich płatności (w chwili $t = 0$) oznaczana jest $a_{\overline{n}|}$ i wynosi

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|} &= v + v^2 + \ldots + v^n \\ &= v\,\frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{\frac{1}{v}-1} \\ &= \frac{1-v^n}{i}. \end{aligned}$$

https://www.extradom.pl/projekt-domu-sezam-WOF1026

Przykład:
Osoba A chce na zakup mieszkania pożyczyć z banku kwotę 300.000 PLN. Czas spłaty kredytu ustalono na 25 lat. Bank oferuje stopę procentową, zgodnie z którą naliczać będzie odsetki, na poziomie 12% rocznie naliczane miesięcznie (oznacza to, że co miesiąc naliczać będzie odsetki w wysokości 1%). Wyznaczyć wysokość raty (ozn. R), jaką osoba A będzie musiała zapłacić każdego miesiąca.

Niech K będzie kwotą kredytu oraz R będzie miesięczną ratą. Wówczas

$$K = R \cdot \left(v + v^2 + \ldots + v^n\right) = R \cdot a_{\overline{n}|},$$

stąd

$$R = \frac{K}{\frac{1-v^n}{i}} = \frac{Ki}{1 - v^n}.$$

Niech K będzie kwotą kredytu oraz R będzie miesięczną ratą. Wówczas

$$K = R \cdot \left(v + v^2 + \ldots + v^n\right) = R \cdot a_{\overline{n}|},$$

stąd

$$R = \frac{K}{\frac{1-v^n}{i}} = \frac{Ki}{1 - v^n}.$$

Krok 1

Niech K będzie kwotą kredytu oraz R będzie miesięczną ratą. Wówczas

$$K = R \cdot \left(v + v^2 + \ldots + v^n\right) = R \cdot a_{\overline{n}|},$$

stąd

$$R = \frac{K}{\frac{1-v^n}{i}} = \frac{Ki}{1 - v^n}.$$

Krok 1

- wyliczamy wartość należnych odsetek zgodnie ze wzorem

$$K \cdot i,$$

Niech K będzie kwotą kredytu oraz R będzie miesięczną ratą. Wówczas

$$K = R \cdot \left(v + v^2 + \ldots + v^n\right) = R \cdot a_{\overline{n}|},$$

stąd

$$R = \frac{K}{\frac{1-v^n}{i}} = \frac{Ki}{1-v^n}.$$

Krok 1

- wyliczamy wartość należnych odsetek zgodnie ze wzorem

$$K \cdot i,$$

- wyliczamy rzeczywistą wartość spłaconego kredytu zgodnie ze wzorem

$$R - K \cdot i,$$

Niech K będzie kwotą kredytu oraz R będzie miesięczną ratą. Wówczas

$$K = R \cdot \left(v + v^2 + \ldots + v^n\right) = R \cdot a_{\overline{n}|},$$

stąd

$$R = \frac{K}{\frac{1-v^n}{i}} = \frac{Ki}{1 - v^n}.$$

Krok 1

- wyliczamy wartość należnych odsetek zgodnie ze wzorem

$$K \cdot i,$$

- wyliczamy rzeczywistą wartość spłaconego kredytu zgodnie ze wzorem

$$R - K \cdot i,$$

- wyliczamy pozostałą, niespłaconą część kredytu zgodnie ze wzorem

$$K - R + K \cdot i = K(1 + i) - R.$$

Krok 2

Krok 2

- wyliczamy wartość należnych odsetek zgodnie ze wzorem

$$[K(1+i)-R]\cdot i = K(1+i)i - Ri,$$

Krok 2

- wyliczamy wartość należnych odsetek zgodnie ze wzorem

$$[K(1+i)-R]\cdot i = K(1+i)i - Ri,$$

- wyliczamy rzeczywistą wartość spłaconego kredytu zgodnie ze wzorem

$$\begin{aligned} & R - K(1+i)i + Ri \\ = \quad & R(1+i) - K(1+i)i, \end{aligned}$$

Krok 2

- wyliczamy wartość należnych odsetek zgodnie ze wzorem

$$[K(1+i) - R] \cdot i = K(1+i)i - Ri,$$

- wyliczamy rzeczywistą wartość spłaconego kredytu zgodnie ze wzorem

$$\begin{aligned} & R - K(1+i)i + Ri \\ = \quad & R(1+i) - K(1+i)i, \end{aligned}$$

- wyliczamy pozostałą, niespłaconą część kredytu zgodnie ze wzorem

$$\begin{aligned} & K(1+i) - R - R(1+i) + K(1+i)i \\ = \quad & K(1+i)^2 - R[(1+i)+1]. \end{aligned}$$

Krok kolejny

Krok kolejny

W kolejnych krokach postępujemy analogicznie.

Krok kolejny

W kolejnych krokach postępujemy analogicznie.

W efekcie dostajemy, że wysokość miesięcznej raty jest równa

Krok kolejny

W kolejnych krokach postępujemy analogicznie.

W efekcie dostajemy, że wysokość miesięcznej raty jest równa

$$R = 3\,159,67 \text{ PLN.}$$

Kredyt z odroczeniem – zadanie konkursowe

Jaka będzie wysokość raty, jeśli pierwsza rata spłacania kredytu będzie zapłacona po trzech miesiącach, a nie po miesiącu?

Kredyt z odroczeniem – zadanie konkursowe

Jaka będzie wysokość raty, jeśli pierwsza rata spłacania kredytu będzie zapłacona po trzech miesiącach, a nie po miesiącu?

Dane

- wysokość kredytu 300 000 zł
- miesięczna stopa oprocentowania kredytu $i = 1\%$
- czas spłaty kredytu 25 lat, czyli $25 \cdot 12 = 300$ rat


50