Modelowanie matematyczne — sukcesy i wpadki

J. Banasiak

Instytut Matematyki PŁ, 13 grudnia 2022

Nauki matematyczne

Celem nauk matematycznych jest zrozumienie praw natury poprzez rozumowanie symboliczne i operowanie abstrakcyjnymi strukturami.

Zatem w naukach matematycznych staramy się:

- odkryć i zanalizować związki pomiędzy tymi abstrakcyjnymi strukturami (matematyka „czysta”),
- zrozumieć możliwie liczne cechy świata zewnętrznego dopasowując je do badanych struktur abstrakcyjnych poprzez modelowanie matematyczne, ich analizę oraz przeformułowanie w sposób zrozumiały dla komputerów, oraz wykorzystanie wyników obliczeń numerycznych do interpretacji i przewidywania świata zewnętrznego (matematyka stosowana),
- wnioskować o własnościach świata rzeczywistego na podstawie danych obserwacyjnych używając abstrakcyjnych struktur i argumentacji, wypracowanych powyżej (statystyka matematyczna, uczenie maszynowe).

Przykład 1. Przykładem modelu matematycznego jest wzór wiążący wysokość niespłaconej $D(k)$ części kredytu D_0 po spłaceniu k rat wysokości R przy oprocentowaniu r,

$$\begin{aligned} D(k) &= (1+r)^k D_0 - R \sum_{i=0}^{k-1} (1+r)^{k-i-1} \\ &= (1+r)^k D_0 - \left((1+r)^k - 1\right) \frac{R}{r}. \end{aligned} \tag{1}$$

W szczególności, jeśli kredyt D_0 udzielony na procent r powinien być spłacony w n ratach, to wysokość raty wynosi

$$R = \frac{rD_0}{1-(1+r)^{-n}}. \tag{2}$$

Przykład 2. Odpadów radioaktywnych często pozbywamy się umieszczając je w szczelnych beczkach i zatapiając w głębokiej wodzie. Problemem jest możliwość pęknięcia beczki przy uderzeniu o dno.

Doświadczenia laboratoryjne pokazują, że beczki mogą pęknąć przy uderzeniu z prędkością $4\,\mathrm{m/s}$.

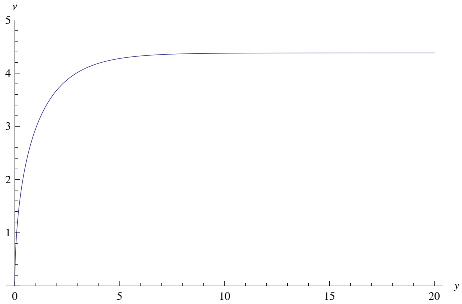
Zmiana prędkości v pojemnika na głębokości y jest dana wzorem

$$mv\frac{dv}{dy} = \left(m\mathrm{g} - B - cv^2\right), \tag{3}$$

gdzie m jest masą beczki, g przyspieszeniem ziemskim, B — siłą wyporu, zaś c — współczynnikiem siły oporu wody, zależnym od kształtu i przekroju zanurzającego się obiektu i gęstości ośrodka.

Równanie (3) ma rozwiązanie

$$v(y) = \sqrt{\frac{mg - B}{c}\left(1 - e^{-\frac{2c}{m}y}\right)}, \tag{4}$$



Rysunek: Prędkość beczki o masie 500 kg wypierającej 200 kg wody o współczynniku oporu 153 kg/m, jako funkcja głębokości.

Dla jakichkolwiek zastosowań matematyki kluczowym zagadnieniem jest sposób, w jaki nasz wewnętrzny aparat poznawczy jest połączony ze światem zewnętrznym. Zatem pojęcie **modelowania matematycznego** jest centralym pojęciem w matematyce stosowanej. Pamiętajmy:

matematyka zawsze odpowiada na pytania o modelu, a nie o światecie zewnętrznym.

Zatem to, co matematyka mówi o świecie zewnętrznym zależy wyłącznie od tego, jak dobrze jest on reprezentowany przez model matematyczny.

Czy taka reprezentacja jest w ogóle możliwa?

- Według starożytnych Greków „Bóg jest geometrą” — tak, świat jest zbudowany według zrozumiałych reguł (geometrycznych, algebraicznych...).
- Nie, cała nauka jest rozsądnym zgadywaniem – mamy dużo szczęścia, jeśli udaje się nam coś przewidzieć.
- Podejście „Po drugiej stronie zwierciadła” – prawda leży pośrodku; wyewoluowaliśmy wraz ze światem zewnętrznym, a zatem nasz aparat poznawczy musi być przynajmniej do pewnego stopnia wiernym odbiciem świata zewnętrznego i praw nim rządzących, gdyż inaczej nie przetrwalibyśmy. (K. Lorenz, nagroda Nobla w 1973)

Czyli matematyka jest

- w najgorszym przypadku, językiem nauki,
- a w najlepszym, szóstym zmysłem, pomostem pomiędzy naszym umysłem a wszechświatem.

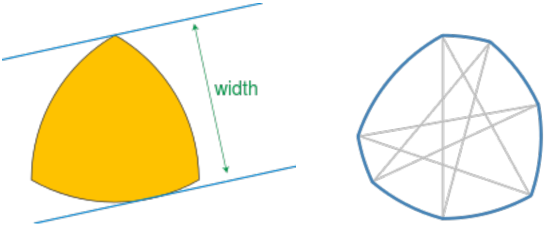
Innymi słowy, poszukujemy odpowiedzi na pytanie, czy dzięki matematyce nasz umysł może przekroczyć granice wyznaczone przez zmysły, konstruując obiekty myślowe mające swoje odpowiedniki we wszechświecie, a niedostępne bezpośrednio dla zmysłów, i czy możemy w wiarygodny sposób używać tych obiektów do przewidywania zdarzeń, które mogą być bezpośrednio weryfikowane.

Czy w ogóle potrzebujemy matematyki w codziennym życiu?

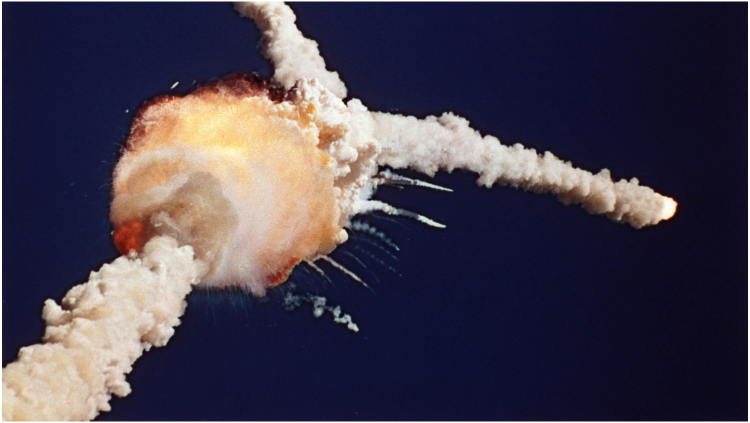
1. Czy jest jakiś powód, poza ciekawością, aby zadać sobie pytanie:

Czy, oprócz okręgu, istnieją figury o stałej szerokości?

Figurą o stałej szerokości nazywamy figurę na płaszczyźnie o tej własności, że proste równoległe przylegające do tej figury z obu stron mają tę samą odległość bez względu na kierunek.

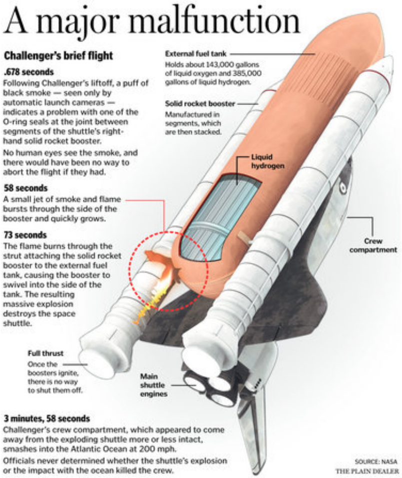


Rysunek: Trójkąt i wielokąt Reuleaux

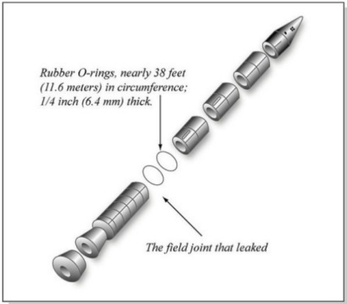


Rysunek: Katastrofa wahadłowca Challenger

Strzeżcie się fałszywych okręgów!



Rysunek: Zdarzenia prowadzące do wybuchu

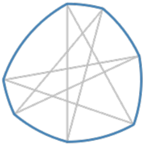


Rysunek: Rakiety dodatkowe na paliwo stałe i pierścienie uszczelniające

Puste rakiety dodatkowe są odrzucane po wyczerpaniu się paliwa, wyławiane z oceanu, cięte poprzecznie na kawałki w kształcie rur w celu ułatwienia transportu i remontowane. Przekrój każdej rury jest badany pod względem jego okrągłości.

Jeśli fragment jest uznany za niewystarczająco okrągły, jest on ponownie kształtowany, ponieważ poszczególne fragmenty po złożeniu muszą do siebie idealnie pasować, aby pierścienie uszczelniające uniemożliwiały wyciek płonącego paliwa. Jest to szczególnie ważne w niskich temperaturach, gdy guma uszczelek traci elastyczność.

R. Feynman zauważył, że w okresie startów wahadłowców NASA sprawdzało, czy rurowe fragmenty zbiornika są okragłe, dokonując zaledwie trzech pomiarów jego szerokości — jeśli mierzona szerokość rury w trzech różnych miejscach była taka sama, uznawano, że rura jest okrągła



Rysunek: Okrąg według standardów NASA w 1986

Podstawy modelowania matematycznego.

W praktyce na ogół stosujemy podejście „Po drugiej stronie zwierciadła”, to znaczy, uważamy, że nasze zmysły nie oszukują nas przekazując nam bodźce ze świata zewnętrznego, ale też umysł syntetyzując te bodźce potrafi wyjść poza doświadczenie zmysłów w sposób spójny ze strukturą wszechświata. Innymi słowy, wierzymy, że poprawność przewidywań modeli nie jest szczęśliwym trafem, ale wynika z tego, że nasz umysł jest odbiciem praw natury. Musimy jednak nieustająco pamiętać, że każde takie „wyjście poza” ma swoje granice i w związku z tym musimy ciągle sprawdzać, czy ich nie przekroczyliśmy.

Jak mówiliśmy wcześniej, **modelem matematycznym** nazywamy abstrakcyjny obiekt, często równanie, które opisuje w sposób ilościowy zachowanie określonych obiektów i, idealnie, umożliwia prognozowanie ich zachowań.

- Model ruchu prostoliniowego ze stałym przyspieszeniem a

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

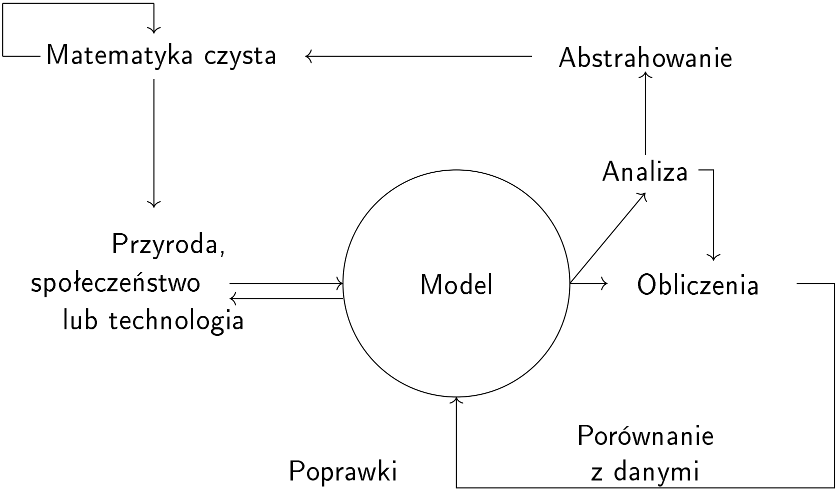
gdzie x_0 i v_0 to początkowe położenie i prędkość obiektu.

- Ogólniejsza wersja tego modelu to

$$\frac{d^2}{dt^2}(m(t)x(t)) = F(t),$$

gdzie m i x to masa i położenie obiektu, zaś F to działająca nań siła.

Modelowaniem matematycznym nazywamy proces budowania i analizowania modeli, opracowywania prognoz wynikających z tych modeli i ich porównywania z danymi obserwacyjnymi.



Jesteśmy z tego świata i żadna idea nie powstaje całkowicie w nas,

bez odniesień do świata zewnątrznego.

Pamiętajmy, że

- Modelowanie matematyczne to nie matematyka — nie można udowodnić, że dany model jest poprawny.

Tak naprawdę,

- *Każdy model jest błędny; pytaniem praktycznym jest, jak błędny musi on być, aby przestał być użyteczny.*

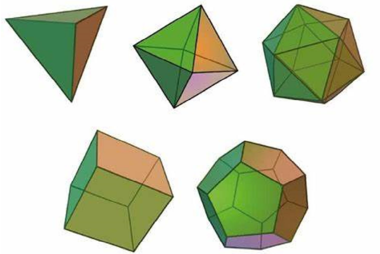
Są jednak bardzo złe modele i całkiem dobre. Podsumowując wcześniejszą dyskusją, dobry model:

- Pozwala przewidywać — modele są budowane na podstawie zbioru danych doświadczalnych zebranych w określonych warunkach. Jeśli jesteśmy w stanie wykonać podobne doświadczenie w innych warunkach, to otrzymane dane powinny zgadzać się z przewidywaniami modelu. Przykładowo:
  - ogólna teoria względności — ugięcie światła, fale grawitacyjne;
  - równania Diraca — istnienie pozytonów;
  - teoria standardowa — istnienie bozonu Higgsa.

- Zawiera wcześniejsze sprawdzające się modele jako podmodele:
  - mechanika Newtona jest zawarta w teorii względności (szczególnej i ogólnej) jeśli rozpatrujemy prędkości małe w stosunku do prędkości światła i rejony odległe od dużych mas;
  - mechanika kwantowa daje te same wyniki, co mechanika Newtona jeśli rozpatrujemy obiekty dużych rozmiarów i nie za małe energie.

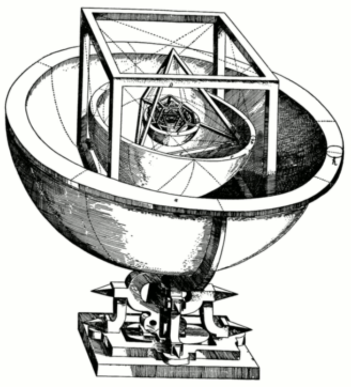
Zły model.

- Bryły platońskie — wielościany mające takie same wielokąty jako ściany i równe kąty wielościenne. Platon znał cztery takie bryły i utożsamiał je z żywiołami — wodą, ziemią, ogniem i powietrzem. Gdy jego uczeń odkrył dwunastościan, Platon uznał go za odpowiadający pierwiastkowi boskiemu (lub wszechświatowi).



Johannes Kepler: 5 brył platońskich i 6 znanych planet, Merkury, Wenus, Ziemia, Mars, Jowisz i Saturn — przypadek? Jeśli bowiem na sferze o promieniu orbity Merkurego opisać ośmiościan, a na nim opisać następną sferę, to jej promień odpowiadać będzie promieniowi orbity Wenus. Jeśli na tej drugiej sferze opisać dwudziestościan, a na nim kolejną trzecią sferę, to jej promień odpowiada promieniowi orbity Ziemi. I tak kolejno dla następnych wielościanów foremnych i planet: dwunastościan – Mars, czworościan – Jowisz, sześcian – Saturn.

Wyliczone promienie orbit zgadzały się mniej więcej ówczesnymi obserwacjami.



Prostota i logika modelu i jego zgodność z obserwacjami niewiele mówią o jego poprawności.

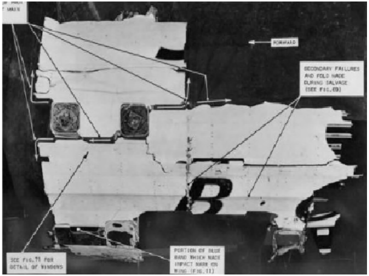
Czy potrzebna jest matematyczna analiza modeli? Czy nie wystarczy, po sformułowaniu modelu, wrzucić go na komputer? Zawsze coś użytecznego da się wycisnąć.

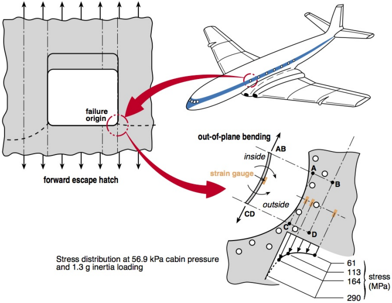
Efektem takiego myślenia jest historia pierwszego odrzutowego samolotu pasażerskiego de Havilland Comet:

• 10 stycznia 1954, Comet pierwszej serii rozpadł się w powietrzu u wybrzeży Elby zabijając wszystkie 35 osób na pokładzie,

• 8 kwietnia 1954, Comet spadł do morza w pobliżu Neapolu, zabijając wszystkie 21 osób na pokładzie.

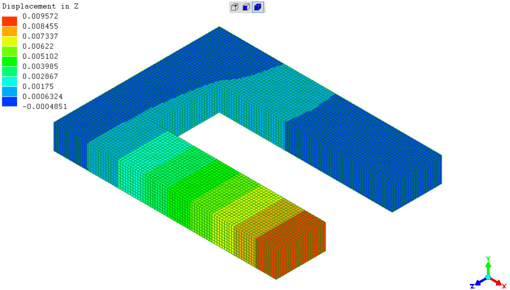
Rysunek: Pierwsza (góra) i późniejsza (dół) wersja Cometa



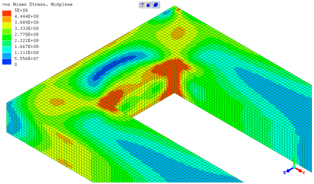


Rysunek: Wyłowione szczątki Cometa i ich analiza — pęknięcie przy rogu

Dlaczego? Popatrzmy, co się dzieje w pobliżu rogu kwadratowego otworu.



,



Rysunek: Komputerowe przedstawienie odkształceń (góra) i naprężeń

O ile odkształcenia wyglądają w porządku, naprężenia rosną dramatycznie — nazywamy to katastrofą gradientową, bo naprężenia wyrażają się poprzez pochodne (gradienty) rozwiązań. Samo wystąpienie dużych naprężeń nie musi być groźne, natomiast poddawanie materiału wielokrotnym nadmiernym obciążeniom prowadzi do tak zwanego zmęczenia materiału, i we efekcie jego pęknięcia.

Co więcej, koncentracja naprężeń jest zjawiskiem lokalnym — tak zwana zasada St. Venanta mówi, że wpływ zaburzenia w maleje bardzo szybko, gdy oddalamy się od miejsca jego przyłożenia.

Dlaczego więc Cometa skonstruowano tak, jak go skonstruowano?

• Równania są sformułowane dla odkształceń, więc ich rozwiązania nie wykazują osobliwości. Dopiero analiza równań, która bada regularność rozwiązań (czyli na przykład właściwości pochodnych rozwiązań), może wykryć pojawienie się katastrofy gradientowej.

• Również zbyt mała ilość punktów w których rozwiązanie jest obliczane przez komputer może nie wykryć dużych naprężeń pojawiających się w bliskim sąsiedztwie rogów ze względu na zasadę St. Venanta.

• Skoro tak, konstruktorzy byli nieświadomi możliwości wystąpienia katastrofalnego zmęczenia materiału.

Prawdopodobną przyczyną wypadków były niechlujne obliczenia z pominięciem analizy modelu — algorytmy obliczeniowy skonstruowano bez zrozumienia osobliwości rozwiązania i tego, jak wpływają one na dokładność i szybkość obliczeń.

Jak tego uniknąć?

• Pomyśl, zanim włączysz komputer. Staraj się zrozumieć, jakie właściwości mają rozwiązania modelu na podstawie jego struktury. Do tego służy analiza matematyczna. W tym przypadku istnieje teoria matematyczna, która

– pozwala wykryć katastrofę gradientową,

– podaje dokładny opis tego, jak „złe" jest rozwiązanie koło rogu, co pozwala „usunąć" te osobliwości z rozwiązania i przeprowadzić normalne obliczenia.