Bogactwo świata fraktali, czyli o tym jak prosta matematyka modeluje skomplikowaną rzeczywistość

Filip Strobin

Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej

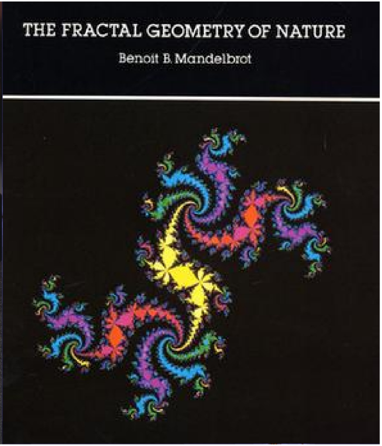
filip.strobin@p.lodz.pl

Spotkania z Matematyką, 11.01.2022

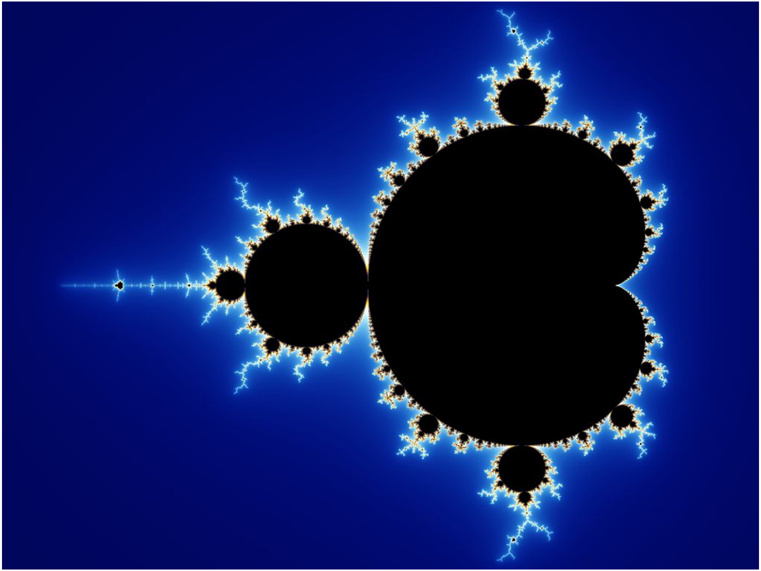
Czym są fraktale?

Trochę historii...najnowszej

Benoît Mandelbrot



Zbiór Mandelbrota



Czym są fraktale?

Fraktal powinien:

- być samopodobny;
- mieć nietrywialną strukturę;
- mieć rekurencyjną definicję.

...ale niekoniecznie...

Czym są fraktale?

Fraktal powinien:

- być samopodobny;
- mieć nietrywialną strukturę;
- mieć rekurencyjną definicję.

...ale niekoniecznie...

Czym są fraktale?

Fraktal powinien:

- być samopodobny;
- mieć nietrywialną strukturę;
- mieć rekurencyjną definicję.

...ale niekoniecznie...

Czym są fraktale?

Fraktal powinien:

- być samopodobny;
- mieć nietrywialną strukturę;
- mieć rekurencyjną definicję.

...ale niekoniecznie...

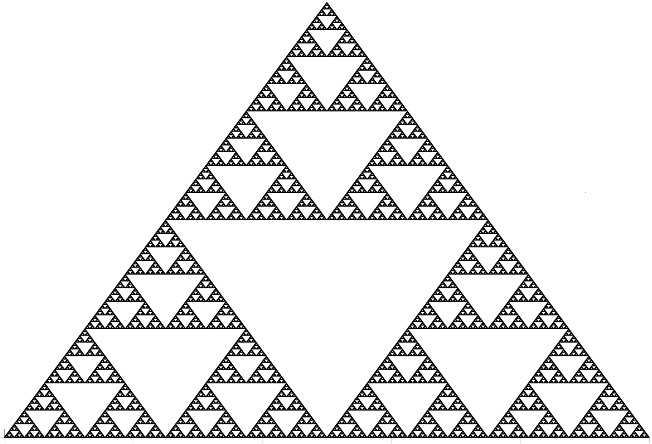
Czym są fraktale?

Fraktal powinien:

- być samopodobny;
- mieć nietrywialną strukturę;
- mieć rekurencyjną definicję.

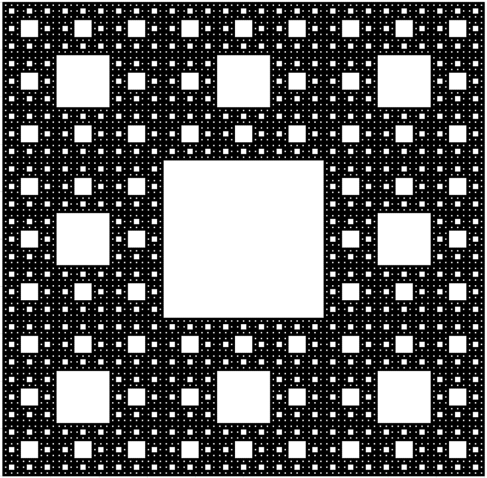
...ale niekoniecznie...

Fraktale...znane już wcześniej?



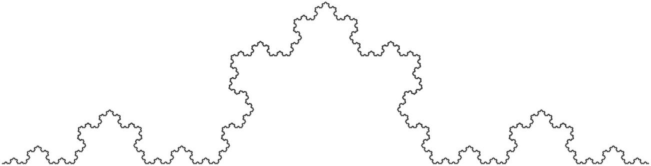
Trójkąt Sierpińskiego (1915 r.)

Fraktale...znane już wcześniej?



Dywan Sierpińskiego (1916 r.)

Fraktale...znane już wcześniej?



Krzywa Kocha (1904 r.)

Zbiór Cantora (1983 r.)

Fraktale w przyrodzie?

Kalafior rzymski

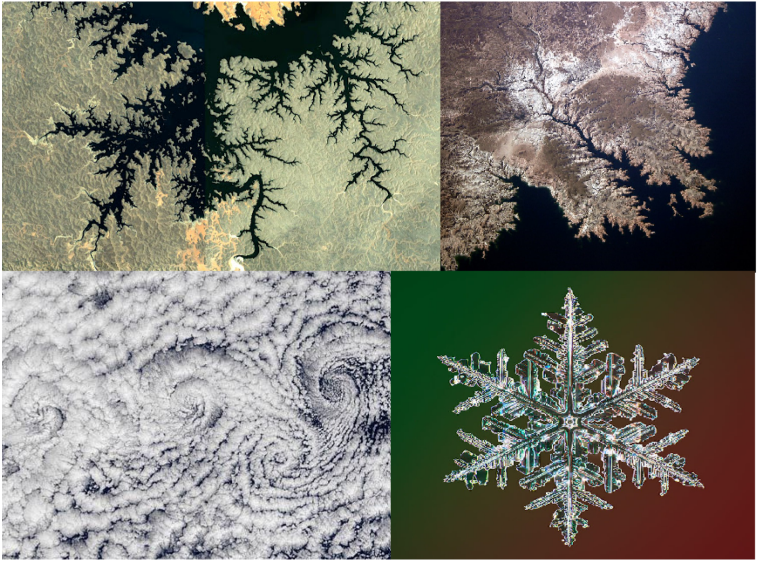
Fraktale w przyrodzie?

Gałąź   Paproć

Fraktale w przyrodzie?

Błyskawica

I wiele wiele innych...



Jak konstruować fraktale?

Twierdzenie Hutchinsona-Barnsleya

Niech X oznacza prostą $\mathbb{R}$, płaszczyznę $\mathbb{R}^2$, przestrzeń $\mathbb{R}^3$.

Twierdzenie

Załóżmy, że $F_1, ..., F_N$ są zwężającymi przekształceniami X. Wówczas istnieje dokładnie jeden porządny zbiór $A \subset X$, spełniający równanie

$$A = F_1(A) \cup ... \cup F_N(A).$$

Definicja

Układ $(F_1, ..., F_N)$ odwzorowań zwężających nazywamy **iterowanym układem odwzorowań** (**IFS-em**).

Zbiór A nazywamy **atraktorem** lub **fraktalem** generowanym przez IFS $(F_1, ..., F_N)$.

Twierdzenie Hutchinsona-Barnsleya

Niech X oznacza prostą $\mathbb{R}$, płaszczyznę $\mathbb{R}^2$, przestrzeń $\mathbb{R}^3$.

Twierdzenie

Załóżmy, że $F_1, ..., F_N$ są zwężającymi przekształceniami X. Wówczas istnieje dokładnie jeden porządny zbiór $A \subset X$, spełniający równanie

$$A = F_1(A) \cup ... \cup F_N(A).$$

Definicja

Układ $(F_1, ..., F_N)$ odwzorowań zwężających nazywamy **iterowanym układem odwzorowań (IFS-em)**.

Zbiór A nazywamy **atraktorem** lub **fraktalem** generowanym przez IFS $(F_1, ..., F_N)$.

Twierdzenie Hutchinsona-Barnsleya

Niech X oznacza prostą $\mathbb{R}$, płaszczyznę $\mathbb{R}^2$, przestrzeń $\mathbb{R}^3$.

Twierdzenie

Załóżmy, że $F_1, \ldots, F_N$ są zwężającymi przekształceniami X. Wówczas istnieje dokładnie jeden porządny zbiór $A \subset X$, spełniający równanie

$$A = F_1(A) \cup \ldots \cup F_N(A).$$

Definicja

Układ $(F_1, \ldots, F_N)$ odwzorowań zwężających nazywamy **iterowanym układem odwzorowań** (**IFS-em**).

Zbiór A nazywamy **atraktorem** lub **fraktalem** generowanym przez IFS $(F_1, \ldots, F_N)$.

Twierdzenie Hutchinsona-Barnsleya

Niech X oznacza prostą $\mathbb{R}$, płaszczyznę $\mathbb{R}^2$, przestrzeń $\mathbb{R}^3$.

Twierdzenie

Załóżmy, że $F_1, \ldots, F_N$ są zwężającymi przekształceniami X.
Wówczas istnieje dokładnie jeden porządny zbiór $A \subset X$, spełniający równanie

$$A = F_1(A) \cup \ldots \cup F_N(A).$$

Definicja

Układ $(F_1, \ldots, F_N)$ odwzorowań zwężających nazywamy **iterowanym układem odwzorowań** (**IFS-em**).

Zbiór A nazywamy **atraktorem** lub **fraktalem** generowanym przez IFS $(F_1, \ldots, F_N)$.

Twierdzenie Hutchinsona-Barnsleya - dlasza część

Przy poprzednich założeniach, dla dowolnego porządnego zbioru $K_0 \subset X$, zbiory

$$K_1 = F_1(K_0) \cup ... \cup F_N(K_0)$$

$$K_2 = F_1(K_1) \cup ... \cup F_N(K_1)$$

$$K_3 = F_1(K_2) \cup ... \cup F_N(K_2)$$

$$...............$$

$$K_{n+1} = F_1(K_n) \cup ... \cup F_N(K_n)$$

$$...............$$

są coraz lepszymi przybliżeniami atraktora A.

Algorytmy generowania obrazów atraktorów

Algorytm deterministyczny

* Ustalamy zbiór K_0 - w praktyce zbiór skończony lub pewna figura.
* Generujemy zbiory $K_1, K_2, K_3, \ldots$ zgodnie z podaną procedurą.
* Dla odpowiednio dużego n, zbiór K_n jest dobrym przybliżeniem atraktora A.

Algorytmy generowania obrazów atraktorów

Algorytm deterministyczny

* Ustalamy zbiór K_0 - w praktyce zbiór skończony lub pewna figura.

* Generujemy zbiory $K_1, K_2, K_3, \ldots$ zgodnie z podaną procedurą.

* Dla odpowiednio dużego n, zbiór K_n jest dobrym przybliżeniem atraktora A.

Algorytmy generowania obrazów atraktorów

Algorytm deterministyczny

∗ Ustalamy zbiór K_0 - w praktyce zbiór skończony lub pewna figura.

∗ Generujemy zbiory $K_1, K_2, K_3, \dots$ zgodnie z podaną procedurą.

∗ Dla odpowiednio dużego n, zbiór K_n jest dobrym przybliżeniem atraktora A.

Algorytmy generowania obrazów atraktorów

Algorytm deterministyczny

* Ustalamy zbiór K_0 - w praktyce zbiór skończony lub pewna figura.
* Generujemy zbiory $K_1, K_2, K_3, \ldots$ zgodnie z podaną procedurą.
* Dla odpowiednio dużego n, zbiór K_n jest dobrym przybliżeniem atraktora A.

Dziękuję za uwagę!