# Czy pizza już wystygła, czy też jeszcze nie?

dr Artur Wachowicz, prof. PŁ
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej

Spotkania z matematyką stosowaną, Politechnika Łódzka,
12 kwietnia 2022 r.

# Problem

## Zadanie

Po upieczeniu pizzy w temperaturze 350°F, w ciągu 5 minut po wyjęciu z pieca, jej temperatura spadła do 340°F, przy czym temperatura w kuchni wynosi 75°F. Ile jeszcze trzeba odczekać, aby temperatura pizzy spadła do 300°F?

## Przeliczanie stopni Fahrenheita na Celsjusza

$$C = (F - 32) \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{9}F - 17\frac{7}{9}$$

$$350^\circ F \approx 177^\circ C, \; 340^\circ F \approx 171^\circ C$$

$$300^\circ F \approx 149^\circ C, \; 75^\circ F \approx 24^\circ C$$

# Problem

## Zadanie

Po upieczeniu pizzy w temperaturze 350°F, w ciągu 5 minut po wyjęciu z pieca, jej temperatura spadła do 340°F, przy czym temperatura w kuchni wynosi 75°F. Ile jeszcze trzeba odczekać, aby temperatura pizzy spadła do 300°F?

## Przeliczanie stopni Fahrenheita na Celsjusza

$$C = (F - 32) \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{9}F - 17\frac{7}{9}$$

$$350^\circ F \approx 177^\circ C, \; 340^\circ F \approx 171^\circ C$$

$$300^\circ F \approx 149^\circ C, \; 75^\circ F \approx 24^\circ C$$

# Problem

## Zadanie

Po upieczeniu pizzy w temperaturze 350°F, w ciągu 5 minut po wyjęciu z pieca, jej temperatura spadła do 340°F, przy czym temperatura w kuchni wynosi 75°F. Ile jeszcze trzeba odczekać, aby temperatura pizzy spadła do 300°F?

## Przeliczanie stopni Fahrenheita na Celsjusza

$$C = (F - 32) \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{9}F - 17\frac{7}{9}$$

$$350^\circ F \approx 177^\circ C, \; 340^\circ F \approx 171^\circ C$$

$$300^\circ F \approx 149^\circ C, \; 75^\circ F \approx 24^\circ C$$

# Problem

## Zadanie

Po upieczeniu pizzy w temperaturze 350°F, w ciągu 5 minut po wyjęciu z pieca, jej temperatura spadła do 340°F, przy czym temperatura w kuchni wynosi 75°F. Ile jeszcze trzeba odczekać, aby temperatura pizzy spadła do 300°F?

## Przeliczanie stopni Fahrenheita na Celsjusza

$$C = (F - 32) \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{9}F - 17\frac{7}{9}$$

$$350^\circ F \approx 177^\circ C, \ 340^\circ F \approx 171^\circ C$$

$$300^\circ F \approx 149^\circ C, \ 75^\circ F \approx 24^\circ C$$

# I Prawo stygnięcia Newtona

Prawo to określa z jaką szybkością ciała przekazują sobie energię cieplną.

### Treść prawa

Szybkość zmian temperatury ciała jest proporcjonalna do różnicy temperatury ciała i otoczenia.

### Założenie modelowe

Rozważymy model, w którym pojemność cieplna otoczenia jest dużo większa niż pojemność cieplna rozważanego obiektu.Tym samym będziemy zakładać, że **temperatura otoczenia jest stała**.

# I Prawo stygnięcia Newtona

Prawo to określa z jaką szybkością ciała przekazują sobie energię cieplną.

## Treść prawa

Szybkość zmian temperatury ciała jest proporcjonalna do różnicy temperatury ciała i otoczenia.

## Założenie modelowe

Rozważymy model, w którym pojemność cieplna otoczenia jest dużo większa niż pojemność cieplna rozważanego obiektu. Tym samym będziemy zakładać, że **temperatura otoczenia jest stała**.

# I Prawo stygnięcia Newtona

Prawo to określa z jaką szybkością ciała przekazują sobie energię cieplną.

### Treść prawa

Szybkość zmian temperatury ciała jest proporcjonalna do różnicy temperatury ciała i otoczenia.

### Założenie modelowe

Rozważymy model, w którym pojemność cieplna otoczenia jest dużo większa niż pojemność cieplna rozważanego obiektu. Tym samym będziemy zakładać, że **temperatura otoczenia jest stała**.

# I Prawo stygnięcia Newtona

Prawo to określa z jaką szybkością ciała przekazują sobie energię cieplną.

## Treść prawa

Szybkość zmian temperatury ciała jest proporcjonalna do różnicy temperatury ciała i otoczenia.

## Założenie modelowe

Rozważymy model, w którym pojemność cieplna otoczenia jest dużo większa niż pojemność cieplna rozważanego obiektu. Tym samym będziemy zakładać, że **temperatura otoczenia jest stała**.

# Rozwiązanie zadania

## Oznaczenia

- $T(t)$ - temperatura pizzy w chwili t
- $t_0$ - temperatura otoczenia (w kuchni)

## Interpretacja I prawa stygnięcia

Szybkość zmian temperatury pizzy jest wyznaczana przez $T'(t)$, a ponieważ jest proporcjonalna do $T(t) - t_0$, więc

$$T'(t) = k \cdot (T(t) - t_0), \quad t \geq 0$$

dla pewnej stałej proporcjonalności k$\in \mathbb{R}$.

# Rozwiązanie zadania

## Oznaczenia

- $T(t)$ - temperatura pizzy w chwili t
- $t_0$ - temperatura otoczenia (w kuchni)

## Interpretacja I prawa stygnięcia

Szybkość zmian temperatury pizzy jest wyznaczana przez $T'(t)$, a ponieważ jest proporcjonalna do $T(t) - t_0$, więc

$$T'(t) = k \cdot (T(t) - t_0), \quad t \geq 0$$

dla pewnej stałej proporcjonalności k$\in \mathbb{R}$.

# Rozwiązanie zadania

## Oznaczenia

- $T(t)$ - temperatura pizzy w chwili t
- $t_0$ - temperatura otoczenia (w kuchni)

## Interpretacja I prawa stygnięcia

Szybkość zmian temperatury pizzy jest wyznaczana przez $T'(t)$, a ponieważ jest proporcjonalna do $T(t) - t_0$, więc

$$T'(t) = k \cdot (T(t) - t_0), \quad t \geq 0$$

dla pewnej stałej proporcjonalności k$\in \mathbb{R}$.

# Rozwiązanie zadania

## Oznaczenia

- $T(t)$ - temperatura pizzy w chwili t
- $t_0$ - temperatura otoczenia (w kuchni)

## Interpretacja I prawa stygnięcia

Szybkość zmian temperatury pizzy jest wyznaczana przez $T'(t)$, a ponieważ jest proporcjonalna do $T(t) - t_0$, więc

$$T'(t) = k \cdot (T(t) - t_0), \quad t \geq 0$$

dla pewnej stałej proporcjonalności k$\in \mathbb{R}$.

# Rozwiązanie zadania - c.d.

Uwzględniając warunki zadania otrzymujemy:

$$T'(t) = k \cdot (T(t) - 75), \quad t \geq 0$$

przy czym $T(0) = 350$.
Założymy modelowo, że $T(t) > 75$ dla $t \geq 0$.
Przekształcając równanie otrzymujemy:

$$\frac{T'(t)}{T(t) - 75} = k, \quad t \geq 0.$$

# Rozwiązanie zadania - c.d.

Uwzględniając warunki zadania otrzymujemy:

$$T'(t) = k \cdot (T(t) - 75), \quad t \geq 0$$

przy czym $T(0) = 350$.
Założymy modelowo, że $T(t) > 75$ dla $t \geq 0$.
Przekształcając równanie otrzymujemy:

$$\frac{T'(t)}{T(t) - 75} = k, \quad t \geq 0.$$

# Rozwiązanie zadania - c.d.

Uwzględniając warunki zadania otrzymujemy:

$$T'(t) = k \cdot (T(t) - 75), \quad t \geq 0$$

przy czym $T(0) = 350$.
Założymy modelowo, że $T(t) > 75$ dla $t \geq 0$.
Przekształcając równanie otrzymujemy:

$$\frac{T'(t)}{T(t) - 75} = k, \quad t \geq 0.$$

# Rozwiązanie zadania - c.d.

Uwzględniając warunki zadania otrzymujemy:

$$T'(t) = k \cdot (T(t) - 75), \quad t \geq 0$$

przy czym $T(0) = 350$.
Założymy modelowo, że $T(t) > 75$ dla $t \geq 0$.
Przekształcając równanie otrzymujemy:

$$\frac{T'(t)}{T(t) - 75} = k, \quad t \geq 0.$$

# Rozwiązanie - c.d.

Skoro dwie funkcje pierwotne różnią się o stałą, więc wyliczając funkcje pierwotne obu stron równania

$$\frac{T'(t)}{T(t)-75} = k, \quad t \geq 0,$$

otrzymujemy następujące równanie

$$\ln(T(t)-75) = kt + C, \quad t \geq 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z definicji logarytmu i własności potęgowania widzimy, że:

$$T(t) - 75 = e^{kt+C} = e^{C} \cdot e^{kt} = C_1 \cdot e^{kt}, \quad t \geq 0,\ C \in \mathbb{R},\ C_1 > 0.$$

# Rozwiązanie - c.d.

Skoro dwie funkcje pierwotne różnią się o stałą, więc wyliczając funkcje pierwotne obu stron równania

$$\frac{T'(t)}{T(t)-75}=k, \quad t\geq 0,$$

otrzymujemy następujące równanie

$$\ln(T(t)-75)=kt+C, \quad t\geq 0, \quad C\in\mathbb{R}.$$

Z definicji logarytmu i własności potęgowania widzimy, że:

$$T(t)-75=e^{kt+C}=e^{C}\cdot e^{kt}=C_1\cdot e^{kt}, \quad t\geq 0, \ C\in\mathbb{R}, \ C_1>0.$$

# Rozwiązanie - c.d.

Skoro dwie funkcje pierwotne różnią się o stałą, więc wyliczając funkcje pierwotne obu stron równania

$$\frac{T'(t)}{T(t)-75} = k, \quad t \geq 0,$$

otrzymujemy następujące równanie

$$\ln(T(t)-75) = kt + C, \quad t \geq 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z definicji logarytmu i własności potęgowania widzimy, że:

$$T(t) - 75 = e^{kt+C} = e^{C} \cdot e^{kt} = C_1 \cdot e^{kt}, \quad t \geq 0, \; C \in \mathbb{R}, \; C_1 > 0.$$

# Rozwiązanie - c.d.

Uwzględniając warunek $T(0) = 350$ możemy z równania

$$T(t) - 75 = C_1 \cdot e^{kt}$$

wyliczyć stałą $C_1$:

$$350 - 75 = C_1 \cdot 1, \text{ czyli } C_1 = 275.$$

Zauważmy zatem, że rozwiązanie ogólne problemu ma postać:

$$T(t) = 75 + 275e^{kt}, \ t \geq 0.$$

# Rozwiązanie - c.d.

Uwzględniając warunek $T(0) = 350$ możemy z równania

$$T(t) - 75 = C_1 \cdot e^{kt}$$

wyliczyć stałą $C_1$:

$$350 - 75 = C_1 \cdot 1, \text{ czyli } C_1 = 275.$$

Zauważmy zatem, że rozwiązanie ogólne problemu ma postać:

$$T(t) = 75 + 275e^{kt}, \ t \geq 0.$$

# Rozwiązanie - c.d.

Uwzględniając warunek $T(0) = 350$ możemy z równania

$$T(t) - 75 = C_1 \cdot e^{kt}$$

wyliczyć stałą $C_1$:

$$350 - 75 = C_1 \cdot 1, \text{ czyli } C_1 = 275.$$

Zauważmy zatem, że rozwiązanie ogólne problemu ma postać:

$$T(t) = 75 + 275e^{kt}, \; t \geq 0.$$

# Rozwiązanie - c.d.

Jako ostatni brakujący element w równaniu

$$T(t) = 75 + 275e^{kt}$$

wyznaczymy współczynnik proporcjonalności $k$.
Wykorzystamy w tym celu informację, że pizza po 5 minutach od wyjęcia z pieca obniżyła temperaturę do 340°F.
Mamy więc

$$340 = T(5) = 75 + 275e^{5k}$$

$$265 = 275e^{5k}, \quad e^{5k} = \frac{265}{275} = \frac{53}{55}, \quad 5k = \ln\frac{53}{55}$$

Ostatecznie $k = \frac{1}{5}\ln\frac{53}{55} \approx -0,007048$.

# Rozwiązanie - c.d.

Jako ostatni brakujący element w równaniu

$$T(t) = 75 + 275e^{kt}$$

wyznaczymy współczynnik proporcjonalności $k$.
Wykorzystamy w tym celu informację, że pizza po 5 minutach od wyjęcia z pieca obniżyła temperaturę do 340°F.
Mamy więc

$$340 = T(5) = 75 + 275e^{5k}$$

$$265 = 275e^{5k}, \;\; e^{5k} = \frac{265}{275} = \frac{53}{55}, \;\; 5k = \ln\frac{53}{55}$$

Ostatecznie $k = \frac{1}{5}\ln\frac{53}{55} \approx -0,007048.$

# Rozwiązanie - c.d.

Jako ostatni brakujący element w równaniu

$$T(t) = 75 + 275e^{kt}$$

wyznaczymy współczynnik proporcjonalności $k$.
Wykorzystamy w tym celu informację, że pizza po 5 minutach od wyjęcia z pieca obniżyła temperaturę do 340°F.
Mamy więc

$$340 = T(5) = 75 + 275e^{5k}$$

$$265 = 275e^{5k}, \quad e^{5k} = \frac{265}{275} = \frac{53}{55}, \quad 5k = \ln\frac{53}{55}$$

Ostatecznie $k = \frac{1}{5}\ln\frac{53}{55} \approx -0,007048$.

# Rozwiązanie - c.d.

Jako ostatni brakujący element w równaniu

$$T(t) = 75 + 275e^{kt}$$

wyznaczymy współczynnik proporcjonalności $k$.
Wykorzystamy w tym celu informację, że pizza po 5 minutach od wyjęcia z pieca obniżyła temperaturę do 340°F.
Mamy więc

$$340 = T(5) = 75 + 275e^{5k}$$

$$265 = 275e^{5k}, \quad e^{5k} = \frac{265}{275} = \frac{53}{55}, \quad 5k = \ln\frac{53}{55}$$

Ostatecznie $k = \frac{1}{5}\ln\frac{53}{55} \approx -0,007048$.

# Rozwiązanie - c.d.

Jako ostatni brakujący element w równaniu

$$T(t) = 75 + 275e^{kt}$$

wyznaczymy współczynnik proporcjonalności $k$.
Wykorzystamy w tym celu informację, że pizza po 5 minutach od wyjęcia z pieca obniżyła temperaturę do 340°F.
Mamy więc

$$340 = T(5) = 75 + 275e^{5k}$$

$$265 = 275e^{5k}, \ \ e^{5k} = \frac{265}{275} = \frac{53}{55}, \ \ 5k = \ln\frac{53}{55}$$

Ostatecznie $k = \frac{1}{5}\ln\frac{53}{55} \approx -0,007048.$

# Rozwiązanie - c.d.

Jako ostatni brakujący element w równaniu

$$T(t) = 75 + 275e^{kt}$$

wyznaczymy współczynnik proporcjonalności $k$.
Wykorzystamy w tym celu informację, że pizza po 5 minutach od wyjęcia z pieca obniżyła temperaturę do 340°F.
Mamy więc

$$340 = T(5) = 75 + 275e^{5k}$$

$$265 = 275e^{5k}, \;\; e^{5k} = \frac{265}{275} = \frac{53}{55}, \;\; 5k = \ln\frac{53}{55}$$

Ostatecznie $k = \frac{1}{5}\ln\frac{53}{55} \approx -0,007048.$

# Rozwiązanie - c.d.

Jako ostatni brakujący element w równaniu

$$T(t) = 75 + 275e^{kt}$$

wyznaczymy współczynnik proporcjonalności $k$.
Wykorzystamy w tym celu informację, że pizza po 5 minutach od wyjęcia z pieca obniżyła temperaturę do 340°F.
Mamy więc

$$340 = T(5) = 75 + 275e^{5k}$$

$$265 = 275e^{5k}, \ \ e^{5k} = \frac{265}{275} = \frac{53}{55}, \ \ 5k = \ln\frac{53}{55}$$

Ostatecznie $k = \frac{1}{5}\ln\frac{53}{55} \approx -0,007048$.

# Rozwiązanie - c.d.

Jako ostatni brakujący element w równaniu

$$T(t) = 75 + 275e^{kt}$$

wyznaczymy współczynnik proporcjonalności $k$.
Wykorzystamy w tym celu informację, że pizza po 5 minutach od wyjęcia z pieca obniżyła temperaturę do 340°F.
Mamy więc

$$340 = T(5) = 75 + 275e^{5k}$$

$$265 = 275e^{5k}, \;\; e^{5k} = \frac{265}{275} = \frac{53}{55}, \;\; 5k = \ln\frac{53}{55}$$

Ostatecznie $k = \frac{1}{5}\ln\frac{53}{55} \approx -0,007048.$

# Rozwiązanie - c.d.

Funkcja zmienności temperatury pizzy jest zatem postaci:

$$T(t) = 75 + 275e^{-0{,}007048t}, \ t \geq 0.$$

Pozostaje odpowiedzieć na pytanie po jakim czasie pizza osiągnie temperaturę 300°F :

$$300 = 75 + 275e^{-0{,}007048t}, \ e^{-0{,}007048t} = 9/11$$

$$-0,007048t = \ln\frac{9}{11}, \ t \approx 28,5 \text{ [min]}.$$

# Rozwiązanie - c.d.

Funkcja zmienności temperatury pizzy jest zatem postaci:

$$T(t) = 75 + 275e^{-0{,}007048t}, \; t \geq 0.$$

Pozostaje odpowiedzieć na pytanie po jakim czasie pizza osiągnie temperaturę 300°F :

$$300 = 75 + 275e^{-0{,}007048t}, \; e^{-0{,}007048t} = 9/11$$

$$-0,007048t = \ln\frac{9}{11}, \; t \approx 28,5 \text{ [min]}.$$

# Rozwiązanie - c.d.

Funkcja zmienności temperatury pizzy jest zatem postaci:

$$T(t) = 75 + 275e^{-0{,}007048t}, \; t \geq 0.$$

Pozostaje odpowiedzieć na pytanie po jakim czasie pizza osiągnie temperaturę 300°F :

$$300 = 75 + 275e^{-0{,}007048t}, \; e^{-0{,}007048t} = 9/11$$

$$-0,007048t = \ln\frac{9}{11}, \; t \approx 28,5 \text{ [min]}.$$

# Rozwiązanie - c.d.

Funkcja zmienności temperatury pizzy jest zatem postaci:

$$T(t) = 75 + 275e^{-0{,}007048t}, \ \ t \geq 0.$$

Pozostaje odpowiedzieć na pytanie po jakim czasie pizza osiągnie temperaturę 300°F :

$$300 = 75 + 275e^{-0{,}007048t}, \ \ e^{-0{,}007048t} = 9/11$$

$$-0,007048t = \ln\frac{9}{11}, \ \ t \approx 28,5 \ [\text{min}].$$

# Rozwiązanie - c.d.

Funkcja zmienności temperatury pizzy jest zatem postaci:

$$T(t) = 75 + 275e^{-0{,}007048t}, \ \ t \geq 0.$$

Pozostaje odpowiedzieć na pytanie po jakim czasie pizza osiągnie temperaturę 300°F :

$$300 = 75 + 275e^{-0{,}007048t}, \ \ e^{-0{,}007048t} = 9/11$$

$$-0,007048t = \ln\frac{9}{11}, \ \ t \approx 28,5 \text{ [min]}.$$

**Treść zadania**

W pomieszczeniu o stałej temperaturze 70°F pieczono przez 20 minut pizzę w temperaturze 350°F. Po pewnym czasie od wyjęcia pizzy z pieca (dokładnie o godzinie $14^{50}$) miała ona temperaturę wynoszącą 320°F.
O godzinie $15^{05}$ ponownie zmierzono temperaturę pizzy i wyniosła ona 280° F. **O której godzinie pizza została wstawiona do pieca?**

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ !!!