Niezwykły zbiór Cantora i jego zadziwiające własności

Marek Balcerzak, Politechnika Łódzka

Wykład dla uczniów, marzec 2023

Mój referat dotyczy bardziej matematyki teoretycznej niż stosowanej.

Twórczą zbioru, o którym będę opowiadał, był niemiecki matematyk George Cantor, który w 1883 roku opublikował artykuł na ten temat. Cantor jest także twórcą funkcji Cantora, o której tu będzie również mowa.

Niektórzy matematycy nazywają zbiór Cantora zbiorem Smitha-Volterry-Cantora, bo tę samą konstrukcję wcześniej zaproponował angielski badacz Smith w 1875 r. i włoski uczony Volterra w 1881 r.

Mój referat dotyczy bardziej matematyki teoretycznej niż stosowanej.

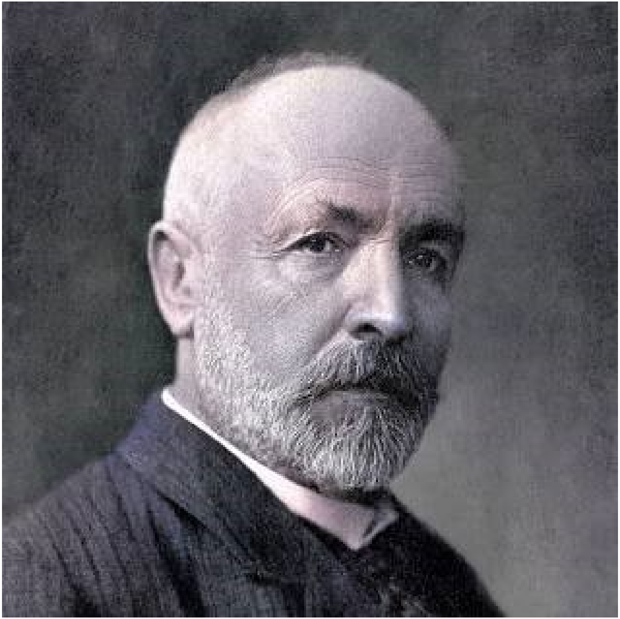
Twórczą zbioru, o którym będę opowiadał, był niemiecki matematyk George Cantor, który w 1883 roku opublikował artykuł na ten temat. Cantor jest także twórcą funkcji Cantora, o której tu będzie również mowa.

Niektórzy matematycy nazywają zbiór Cantora zbiorem Smitha-Volterry-Cantora, bo tę samą konstrukcję wcześniej zaproponował angielski badacz Smith w 1875 r. i włoski uczony Volterra w 1881 r.

Mój referat dotyczy bardziej matematyki teoretycznej niż stosowanej.

Twórczą zbioru, o którym będę opowiadał, był niemiecki matematyk George Cantor, który w 1883 roku opublikował artykuł na ten temat. Cantor jest także twórcą funkcji Cantora, o której tu będzie również mowa.

Niektórzy matematycy nazywają zbiór Cantora zbiorem Smitha-Volterry-Cantora, bo tę samą konstrukcję wcześniej zaproponował angielski badacz Smith w 1875 r. i włoski uczony Volterra w 1881 r.



Konstrukcja zbioru Cantora

Tworzymy dwie rodziny przedziałów zawartych w $[0,1]$:

- przedziały usuwane $U_{(s_1,\ldots,s_n)}$ (otwarte),
- przedziały generujące $P_{(s_1,\ldots,s_n)}$ (domknięte),

gdzie $(s_1,\ldots,s_n)$ jest skończonym ciągiem zero-jedynkowym oraz $n \in \mathbb{N}$.

• 1 krok. Na początku z przedziału $[0,1]$ usuwamy przedział otwarty $U = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Na lewo od niego leży przedział $P_{(0)} = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, zaś na prawo przedział $P_{(1)} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Wszystkie te przedziały mają długość $\frac{1}{3}$.

Długość przedziału I będziemy oznaczać przez $|I|$.

Konstrukcja zbioru Cantora

Tworzymy dwie rodziny przedziałów zawartych w $[0,1]$:

- przedziały usuwane $U_{(s_1,\dots,s_n)}$ (otwarte),
- przedziały generujące $P_{(s_1,\dots,s_n)}$ (domknięte),

gdzie $(s_1,\dots,s_n)$ jest skończonym ciągiem zero-jedynkowym oraz $n \in \mathbb{N}$.

• 1 krok. Na początku z przedziału $[0,1]$ usuwamy przedział otwarty $U = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Na lewo od niego leży przedział $P_{(0)} = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, zaś na prawo przedział $P_{(1)} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Wszystkie te przedziały mają długość $\frac{1}{3}$.

Długość przedziału I będziemy oznaczać przez $|I|$.

• 2 krok. Rozważmy przedziały $P_{(0)}$ i $P_{(1)}$.
Rozważmy taki przedział $P_{(i)}$ dla $i = 0, 1$. Usuwamy z niego środkowy przedział otwarty $U_{(i)}$ o długości $\frac{1}{3}|P_{(i)}| = \frac{1}{9}$.

W przedziale $P_{(i)}$ po lewej stronie pozostaje przedział domknięty $P_{(i,0)}$, a po prawej przedział $P_{(i,1)}$. Każdy z nich ma długość $\frac{1}{9}$.
Zatem

$$U_{(0)} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right),\ U_{(1)} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

$$P_{(0,0)} = \left[0, \frac{1}{9}\right],\ P_{(0,1)} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right],\ P_{(1,0)} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right],\ P_{(1,1)} = \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

• W n-tym kroku z każdego domkniętego przedziału generującego $P_{(s_1 s_2, \ldots, s_{n-1})}$ usuwamy odpowiedni otwarty przedział $U_{(s_1 s_2, \ldots, s_{n-1})}$ o długości $\frac{1}{3}|P_{(s_1 s_2, \ldots, s_{n-1})}| = \frac{1}{3^n}$. Wtedy po jego lewej i prawej stronie powstają domknięte przedziały generujące $P_{(s_1, \ldots, s_{n-1}, 0)}$ oraz $P_{(s_1, \ldots, s_{n-1}, 1)}$ o tej samej długości $\frac{1}{3}|P_{(s_1 s_2, \ldots, s_{n-1})}| = \frac{1}{3^n}$.

• 2 krok. Rozważmy przedziały $P_{(0)}$ i $P_{(1)}$.
Rozważmy taki przedział $P_{(i)}$ dla $i = 0, 1$. Usuwamy z niego środkowy przedział otwarty $U_{(i)}$ o długości $\frac{1}{3}|P_{(i)}| = \frac{1}{9}$.

W przedziale $P_{(i)}$ po lewej stronie pozostaje przedział domknięty $P_{(i,0)}$, a po prawej przedział $P_{(i,1)}$. Każdy z nich ma długość $\frac{1}{9}$.
Zatem

$$U_{(0)} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \ U_{(1)} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

$$P_{(0,0)} = \left[0, \frac{1}{9}\right], \ P_{(0,1)} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \ P_{(1,0)} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \ P_{(1,1)} = \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

• W n-tym kroku z każdego domkniętego przedziału generującego $P_{(s_1 s_2, \dots, s_{n-1})}$ usuwamy odpowiedni otwarty przedział $U_{(s_1 s_2, \dots, s_{n-1})}$ o długości $\frac{1}{3}|P_{(s_1 s_2, \dots, s_{n-1})}| = \frac{1}{3^n}$. Wtedy po jego lewej i prawej stronie powstają domknięte przedziały generujące $P_{(s_1, \dots, s_{n-1}, 0)}$ oraz $P_{(s_1, \dots, s_{n-1}, 1)}$ o tej samej długości $\frac{1}{3}|P_{(s_1 s_2, \dots, s_{n-1})}| = \frac{1}{3^n}$.

• 2 krok. Rozważmy przedziały $P_{(0)}$ i $P_{(1)}$.
Rozważmy taki przedział $P_{(i)}$ dla $i = 0, 1$. Usuwamy z niego środkowy przedział otwarty $U_{(i)}$ o długości $\frac{1}{3}|P_{(i)}| = \frac{1}{9}$.

W przedziale $P_{(i)}$ po lewej stronie pozostaje przedział domknięty $P_{(i,0)}$, a po prawej przedział $P_{(i,1)}$. Każdy z nich ma długość $\frac{1}{9}$.
Zatem

$$U_{(0)} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \; U_{(1)} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

$$P_{(0,0)} = \left[0, \frac{1}{9}\right], \; P_{(0,1)} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \; P_{(1,0)} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \; P_{(1,1)} = \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

• W n-tym kroku z każdego domkniętego przedziału generującego $P_{(s_1 s_2, \dots, s_{n-1})}$ usuwamy odpowiedni otwarty przedział $U_{(s_1 s_2, \dots, s_{n-1})}$ o długości $\frac{1}{3}|P_{(s_1 s_2, \dots, s_{n-1})}| = \frac{1}{3^n}$. Wtedy po jego lewej i prawej stronie powstają domknięte przedziały generujące $P_{(s_1, \dots, s_{n-1}, 0)}$ oraz $P_{(s_1, \dots, s_{n-1}, 1)}$ o tej samej długości $\frac{1}{3}|P_{(s_1 s_2, \dots, s_{n-1})}| = \frac{1}{3^n}$.

• 2 krok. Rozważmy przedziały $P_{(0)}$ i $P_{(1)}$.
Rozważmy taki przedział $P_{(i)}$ dla $i = 0, 1$. Usuwamy z niego środkowy przedział otwarty $U_{(i)}$ o długości $\frac{1}{3}|P_{(i)}| = \frac{1}{9}$.

W przedziale $P_{(i)}$ po lewej stronie pozostaje przedział domknięty $P_{(i,0)}$, a po prawej przedział $P_{(i,1)}$. Każdy z nich ma długość $\frac{1}{9}$.
Zatem

$$U_{(0)} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \; U_{(1)} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

$$P_{(0,0)} = \left[0, \frac{1}{9}\right], \; P_{(0,1)} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \; P_{(1,0)} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \; P_{(1,1)} = \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

• W n-tym kroku z każdego domkniętego przedziału generującego $P_{(s_1 s_2,\dots,s_{n-1})}$ usuwamy odpowiedni otwarty przedział $U_{(s_1 s_2,\dots,s_{n-1})}$ o długości $\frac{1}{3}|P_{(s_1 s_2,\dots,s_{n-1})}| = \frac{1}{3^n}$. Wtedy po jego lewej i prawej stronie powstają domknięte przedziały generujące $P_{(s_1,\dots,s_{n-1},0)}$ oraz $P_{(s_1,\dots,s_{n-1},1)}$ o tej samej długości $\frac{1}{3}|P_{(s_1 s_2,\dots,s_{n-1})}| = \frac{1}{3^n}$.

Dalsza konstrukcja przebiega indukcyjnie w nieskończoność.

Niech C_n oznacza sumę 2^n przedziałów generujących rzędu n, tzn.

$$C_1 = P_{(0)} \cup P_{(1)}, \quad C_2 = P_{(0,0)} \cup P_{(0,1)} \cup P_{(1,0)} \cup P_{(1,1)}, \quad \text{itd.}$$

Można jeszcze przyjąć $C_0 = [0, 1]$.

Definicja

Zbiór Cantora możemy teraz zdefiniować na dwa sposoby:

$$C = C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \ldots \tag{1}$$

albo

$$C = [0, 1] \setminus (U \cup U_{(0)} \cup U_{(1)} \cup U_{(0,0)} \cup U_{(0,1)} \cup \ldots) \tag{2}$$

Dalsza konstrukcja przebiega indukcyjnie w nieskończoność.

Niech C_n oznacza sumę 2^n przedziałów generujących rzędu n, tzn.

$$C_1 = P_{(0)} \cup P_{(1)}, \quad C_2 = P_{(0,0)} \cup P_{(0,1)} \cup P_{(1,0)} \cup P_{(1,1)}, \quad \text{itd.}$$

Można jeszcze przyjąć $C_0 = [0,1]$.

Definicja

Zbiór Cantora możemy teraz zdefiniować na dwa sposoby:

$$C = C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \ldots \tag{1}$$

albo

$$C = [0,1] \setminus (U \cup U_{(0)} \cup U_{(1)} \cup U_{(0,0)} \cup U_{(0,1)} \cup \ldots) \tag{2}$$

Zbiory C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 i C_6

Z przedstawienia (2) wynika, że zbiór C powstaje przez usunięcie z przedziału $[0,1]$ parami rozłącznych przedziałów

$$U, U_{(0)}, U_{(1)}, U_{(0,0)}, U_{(0,1)}, \dots,$$

które nazywamy składowymi dopełnienia $[0,1] \setminus C$.

Policzmy łączną długość tych składowych:

$$|U| + |U_{(0)}| + |U_{(1)}| + |U_{(0,0)}| + |U_{(0,1)}| + \dots = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \dots$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\right) = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Zatem $|C| = |\,[0,1]\,| - 1 = 1 - 1 = 0$, czyli zbiór C jest miary zero, a więc jest mały.

Z przedstawienia (2) wynika, że zbiór C powstaje przez usunięcie z przedziału $[0,1]$ parami rozłącznych przedziałów

$$U, U_{(0)}, U_{(1)}, U_{(0,0)}, U_{(0,1)}, \dots,$$

które nazywamy składowymi dopełnienia $[0,1] \setminus C$.

Policzmy łączną długość tych składowych:

$$|U| + |U_{(0)}| + |U_{(1)}| + |U_{(0,0)}| + |U_{(0,1)}| + \dots = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \dots$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\right) = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Zatem $|C| = |[0,1]| - 1 = 1 - 1 = 0$, czyli zbiór C jest miary zero, a więc jest mały.

Z przedstawienia (2) wynika, że zbiór C powstaje przez usunięcie z przedziału $[0,1]$ parami rozłącznych przedziałów

$$U, U_{(0)}, U_{(1)}, U_{(0,0)}, U_{(0,1)}, \dots,$$

które nazywamy składowymi dopełnienia $[0,1] \setminus C$.

Policzmy łączną długość tych składowych:

$$|U| + |U_{(0)}| + |U_{(1)}| + |U_{(0,0)}| + |U_{(0,1)}| + \dots = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \dots$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\right) = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Zatem $|C| = |\,[0,1]\,| - 1 = 1 - 1 = 0$, czyli zbiór C jest miary zero, a więc jest mały.

Z przedstawienia (1) zbioru C wynika, że jest on częścią wspólną coraz mniejszych zbiorów C_n dla $n \in \mathbb{N}$.
To pokazuje, że C można postrzegać jako pełne drzewo binarne.

Korzeniem drzewa jest przedział $[0,1]$. Lewa krawędź łączy ten wierzchołek z $P_{(0)}$, zaś prawa krawędź z $P_{(1)}$. Potem z wierzchołka $P_{(0)}$ można przejść do $P_{(0,0)}$ albo do $P_{(0,1)}$, zaś z wierzchołka $P_{(1)}$ do $P_{(1,0)}$ albo do $P_{(1,1)}$, itd.

Jak to interpretować dla $x \in C$?
Otóż każdy punkt $x \in C$ wpada do dokładnie jednego zbioru $P_{(0)}$ albo $P_{(1)}$. Będąc w $P_{(0)}$ wpada on albo do $P_{(0,0)}$ albo do $P_{(0,1)}$. Natomiast będąc w $P_{(1)}$ punkt x wpada albo do $P_{(1,0)}$ albo do $P_{(1,1)}$, itd.
Zatem widzimy, że dla każdego $x \in C$ istnieje dokładnie jeden nieskończony ciąg $(s_1, s_2, \dots)$ zer i jedynek taki, że

$$x \in P_{(s_1)} \cap P_{(s_1,s_2)} \cap P_{(s_1,s_2,s_3)} \cap \dots .$$

Z przedstawienia (1) zbioru C wynika, że jest on częścią wspólną coraz mniejszych zbiorów C_n dla $n \in \mathbb{N}$.
To pokazuje, że C można postrzegać jako pełne drzewo binarne.

Korzeniem drzewa jest przedział $[0, 1]$. Lewa krawędź łączy ten wierzchołek z $P_{(0)}$, zaś prawa krawędź z $P_{(1)}$. Potem z wierzchołka $P_{(0)}$ można przejść do $P_{(0,0)}$ albo do $P_{(0,1)}$, zaś z wierzchołka $P_{(1)}$ do $P_{(1,0)}$ albo do $P_{(1,1)}$, itd.

Jak to interpretować dla $x \in C$?
Otóż każdy punkt $x \in C$ wpada do dokładnie jednego zbioru $P_{(0)}$ albo $P_{(1)}$. Będąc w $P_{(0)}$ wpada on albo do $P_{(0,0)}$ albo do $P_{(0,1)}$. Natomiast będąc w $P_{(1)}$ punkt x wpada albo do $P_{(1,0)}$ albo do $P_{(1,1)}$, itd.
Zatem widzimy, że dla każdego $x \in C$ istnieje dokładnie jeden nieskończony ciąg $(s_1, s_2, \dots)$ zer i jedynek taki, że

$$x \in P_{(s_1)} \cap P_{(s_1,s_2)} \cap P_{(s_1,s_2,s_3)} \cap \dots .$$

Z przedstawienia (1) zbioru C wynika, że jest on częścią wspólną coraz mniejszych zbiorów C_n dla $n \in \mathbb{N}$.
To pokazuje, że C można postrzegać jako pełne drzewo binarne.

Korzeniem drzewa jest przedział $[0, 1]$. Lewa krawędź łączy ten wierzchołek z $P_{(0)}$, zaś prawa krawędź z $P_{(1)}$. Potem z wierzchołka $P_{(0)}$ można przejść do $P_{(0,0)}$ albo do $P_{(0,1)}$, zaś z wierzchołka $P_{(1)}$ do $P_{(1,0)}$ albo do $P_{(1,1)}$, itd.

Jak to interpretować dla $x \in C$?
Otóż każdy punkt $x \in C$ wpada do dokładnie jednego zbioru $P_{(0)}$ albo $P_{(1)}$. Będąc w $P_{(0)}$ wpada on albo do $P_{(0,0)}$ albo do $P_{(0,1)}$. Natomiast będąc w $P_{(1)}$ punkt x wpada albo do $P_{(1,0)}$ albo do $P_{(1,1)}$, itd.
Zatem widzimy, że dla każdego $x \in C$ istnieje dokładnie jeden nieskończony ciąg $(s_1, s_2, \ldots)$ zer i jedynek taki, że

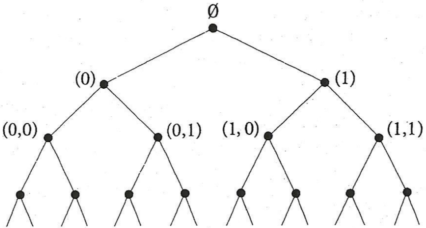
$$x \in P_{(s_1)} \cap P_{(s_1,s_2)} \cap P_{(s_1,s_2,s_3)} \cap \ldots .$$

Z przedstawienia (1) zbioru C wynika, że jest on częścią wspólną coraz mniejszych zbiorów C_n dla $n \in \mathbb{N}$.
To pokazuje, że C można postrzegać jako pełne drzewo binarne.

Korzeniem drzewa jest przedział $[0, 1]$. Lewa krawędź łączy ten wierzchołek z $P_{(0)}$, zaś prawa krawędź z $P_{(1)}$. Potem z wierzchołka $P_{(0)}$ można przejść do $P_{(0,0)}$ albo do $P_{(0,1)}$, zaś z wierzchołka $P_{(1)}$ do $P_{(1,0)}$ albo do $P_{(1,1)}$, itd.

Jak to interpretować dla $x \in C$?
Otóż każdy punkt $x \in C$ wpada do dokładnie jednego zbioru $P_{(0)}$ albo $P_{(1)}$. Będąc w $P_{(0)}$ wpada on albo do $P_{(0,0)}$ albo do $P_{(0,1)}$. Natomiast będąc w $P_{(1)}$ punkt x wpada albo do $P_{(1,0)}$ albo do $P_{(1,1)}$, itd.
Zatem widzimy, że dla każdego $x \in C$ istnieje dokładnie jeden nieskończony ciąg $(s_1, s_2, \ldots)$ zer i jedynek taki, że

$$x \in P_{(s_1)} \cap P_{(s_1,s_2)} \cap P_{(s_1,s_2,s_3)} \cap \ldots .$$


∅
(0)
(1)
(0,0)
(0,1)
(1, 0)
(1,1)

W języku drzew oznacza to, że punktowi $x \in C$ odpowiada nieskończona gałąź drzewa binarnego.

Ponadto zauważmy, że przyporządkowanie

$$C \ni x \mapsto (s_1, s_2, \dots) \tag{3}$$

jest wzajemnie jednoznaczne.

Zatem w abstrakcyjnym ujęciu zbiór Cantora można utożsamiać ze zbiorem wszystkich nieskończonych ciągów zerojedynkowych.

Dowodzi się, że ten ostatni zbiór ma taką samą liczność jak zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Przyporządkowanie (3) pokazuje więc, że C też ma liczność taką jak $\mathbb{R}$. W tym sensie zbiór Cantora jest duży.

W języku drzew oznacza to, że punktowi $x \in C$ odpowiada nieskończona gałąź drzewa binarnego.

Ponadto zauważmy, że przyporządkowanie

$$C \ni x \mapsto (s_1, s_2, \dots) \tag{3}$$

jest wzajemnie jednoznaczne.

Zatem w abstrakcyjnym ujęciu zbiór Cantora można utożsamiać ze zbiorem wszystkich nieskończonych ciągów zerojedynkowych.

Dowodzi się, że ten ostatni zbiór ma taką samą liczność jak zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Przyporządkowanie (3) pokazuje więc, że C też ma liczność taką jak $\mathbb{R}$. W tym sensie zbiór Cantora jest duży.

W języku drzew oznacza to, że punktowi $x \in C$ odpowiada nieskończona gałąź drzewa binarnego.

Ponadto zauważmy, że przyporządkowanie

$$C \ni x \mapsto (s_1, s_2, \ldots) \tag{3}$$

jest wzajemnie jednoznaczne.

Zatem w abstrakcyjnym ujęciu zbiór Cantora można utożsamiać ze zbiorem wszystkich nieskończonych ciągów zerojedynkowych.

Dowodzi się, że ten ostatni zbiór ma taką samą liczność jak zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Przyporządkowanie (3) pokazuje więc, że C też ma liczność taką jak $\mathbb{R}$. W tym sensie zbiór Cantora jest duży.

Charakteryzacja przez rozwinięcia trójkowe

Każdą liczbę $x \in [0, 1]$ można zapisać w systemie trójkowym w postaci

$$x = (0, x_1 x_2 \dots)_3 \quad \text{dla } x_i \in \{0, 1, 2\},\ i \in \mathbb{N}.$$

Zapis $x = (0, x_1 x_2 \dots)_3$ oznacza, że

$$x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \dots + \frac{x_n}{3^n} \right).$$

Twierdzenie

Zbiór Cantora składa się z liczb $x \in [0, 1]$, które mają rozwinięcie trójkowe $x = (0, x_1 x_2 \dots)_3$, gdzie $x_i \in \{0, 2\}$ dla $i \in \mathbb{N}$, tzn. rozwinięcie to nie używa cyfry 1.

Charakteryzacja przez rozwinięcia trójkowe

Każdą liczbę $x \in [0,1]$ można zapisać w systemie trójkowym w postaci

$$x = (0,x_1x_2\dots)_3 \quad \text{dla } x_i \in \{0,1,2\}, \; i \in \mathbb{N}.$$

Zapis $x = (0,x_1x_2\dots)_3$ oznacza, że

$$x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \dots + \frac{x_n}{3^n}\right).$$

Twierdzenie

Zbiór Cantora składa się z liczb $x \in [0,1]$, które mają rozwinięcie trójkowe $x = (0,x_1x_2\dots)_3$, gdzie $x_i \in \{0,2\}$ dla $i \in \mathbb{N}$, tzn. rozwinięcie to nie używa cyfry 1.

Uzasadnienie

- Liczby ze zbioru $C_1 = P_{(0)} \cup P_{(1)}$ to dokładnie takie liczby $x \in [0,1]$, że $x = (0, x_1 x_2 \dots)_3$, gdzie $x_1 \neq 1$.
- Liczby ze zbioru C_2 to dokładnie takie liczby $x \in [0,1]$, że $x = (0, x_1 x_2 \dots)_3$, gdzie $x_1 \neq 1$, $x_2 \neq 1$.
- Podobnie dla C_3, C_4, itd.
- Zatem liczby ze zbioru $C = C_1 \cap C_2 \cap \dots$ to dokładnie takie liczby $x \in [0,1]$, że $x_k \neq 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Uzasadnienie

- Liczby ze zbioru $C_1 = P_{(0)} \cup P_{(1)}$ to dokładnie takie liczby $x \in [0, 1]$, że $x = (0, x_1 x_2 \dots)_3$, gdzie $x_1 \neq 1$.
- Liczby ze zbioru C_2 to dokładnie takie liczby $x \in [0, 1]$, że $x = (0, x_1 x_2 \dots)_3$, gdzie $x_1 \neq 1$, $x_2 \neq 1$.
- Podobnie dla C_3, C_4, itd.
- Zatem liczby ze zbioru $C = C_1 \cap C_2 \cap \dots$ to dokładnie takie liczby $x \in [0, 1]$, że $x_k \neq 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Uzasadnienie

- Liczby ze zbioru $C_1 = P_{(0)} \cup P_{(1)}$ to dokładnie takie liczby $x \in [0,1]$, że $x = (0, x_1 x_2 \dots)_3$, gdzie $x_1 \neq 1$.
- Liczby ze zbioru C_2 to dokładnie takie liczby $x \in [0,1]$, że $x = (0, x_1 x_2 \dots)_3$, gdzie $x_1 \neq 1$, $x_2 \neq 1$.
- Podobnie dla C_3, C_4, itd.
- Zatem liczby ze zbioru $C = C_1 \cap C_2 \cap \dots$ to dokładnie takie liczby $x \in [0,1]$, że $x_k \neq 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Uzasadnienie

- Liczby ze zbioru $C_1 = P_{(0)} \cup P_{(1)}$ to dokładnie takie liczby $x \in [0,1]$, że $x = (0, x_1 x_2 \dots)_3$, gdzie $x_1 \neq 1$.
- Liczby ze zbioru C_2 to dokładnie takie liczby $x \in [0,1]$, że $x = (0, x_1 x_2 \dots)_3$, gdzie $x_1 \neq 1$, $x_2 \neq 1$.
- Podobnie dla C_3, C_4, itd.
- Zatem liczby ze zbioru $C = C_1 \cap C_2 \cap \dots$ to dokładnie takie liczby $x \in [0,1]$, że $x_k \neq 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Z konstrukcji wynika, że w każdym otoczeniu $(x - r, x + r)$, $r > 0$, dowolnego punktu $x \in C$ znajdą się końce przedziałów usuwanych, a one należą do C.
W tym sensie ponownie zbiór C okazuje się duży - mówimy, że jest on w sobie gęsty.

Innym faktem świadczącym o tym, że zbiór Cantora jest duży, która mówi, że zbiór wszystkich różnic $x - y$, gdzie $x, y \in C$ jest całym przedziałem $[-1, 1]$. Fakt ten odnotował polski matematyk Hugo Steinhaus poprzez nietrudne rozważania geometryczne.

Z konstrukcji wynika, że w każdym otoczeniu $(x - r, x + r)$, $r > 0$, dowolnego punktu $x \in C$ znajdą się końce przedziałów usuwanych, a one należą do C.
W tym sensie ponownie zbiór C okazuje się duży - mówimy, że jest on w sobie gęsty.

Innym faktem świadczącym o tym, że zbiór Cantora jest duży, która mówi, że zbiór wszystkich różnic $x - y$, gdzie $x, y \in C$ jest całym przedziałem $[-1, 1]$. Fakt ten odnotował polski matematyk Hugo Steinhaus poprzez nietrudne rozważania geometryczne.

Funkcja Cantora

Funkcja Cantora jest ważnym przykładem funkcji o specjalnych własnościach. Można ją zdefiniować indukcyjnie.

Funkcja Cantora $f\colon [0,1] \to [0,1]$ powstaje przez jednostajne przybliżenie przez ciąg funkcji $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$, których wykresami są linie łamane oraz $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$.

- Funkcja f_0 jest identycznością, tzn. $f_0(x) = x$ dla $x \in [0,1]$.

- Funkcja f_1 jest równa $\frac{1}{2}$ na przedziale $\overline{U} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ oraz jest liniowa na przedziałach $P_{(0)}$ i $P_{(1)}$.

- Funkcję f_2 określamy poniższym wzorem i rozszerzamy ją liniowo;

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } x \in \overline{U} \\ \frac{1}{4} & \text{dla } x \in \overline{U_{(0)}} = \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right] \\ \frac{3}{4} & \text{dla } x \in \overline{U_{(1)}} = \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right] \end{cases}$$

Funkcja Cantora

Funkcja Cantora jest ważnym przykładem funkcji o specjalnych własnościach. Można ją zdefiniować indukcyjnie.

Funkcja Cantora $f\colon [0,1] \to [0,1]$ powstaje przez jednostajne przybliżenie przez ciąg funkcji $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$, których wykresami są linie łamane oraz $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$.

- Funkcja f_0 jest identycznością, tzn. $f_0(x) = x$ dla $x \in [0,1]$.
- Funkcja f_1 jest równa $\frac{1}{2}$ na przedziale $\overline{U} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ oraz jest liniowa na przedziałach $P_{(0)}$ i $P_{(1)}$.
- Funkcję f_2 określamy poniższym wzorem i rozszerzamy ją liniowo;

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } x \in \overline{U} \\ \frac{1}{4} & \text{dla } x \in \overline{U_{(0)}} = \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right] \\ \frac{3}{4} & \text{dla } x \in \overline{U_{(1)}} = \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right] \end{cases}$$

Funkcja Cantora

Funkcja Cantora jest ważnym przykładem funkcji o specjalnych własnościach. Można ją zdefiniować indukcyjnie.

Funkcja Cantora $f\colon [0,1] \to [0,1]$ powstaje przez jednostajne przybliżenie przez ciąg funkcji $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$, których wykresami są linie łamane oraz $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$.

- Funkcja f_0 jest identycznością, tzn. $f_0(x) = x$ dla $x \in [0,1]$.

- Funkcja f_1 jest równa $\frac{1}{2}$ na przedziale $\overline{U} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ oraz jest liniowa na przedziałach $P_{(0)}$ i $P_{(1)}$.

- Funkcję f_2 określamy poniższym wzorem i rozszerzamy ją liniowo;

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } x \in \overline{U} \\ \frac{1}{4} & \text{dla } x \in \overline{U_{(0)}} = \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right] \\ \frac{3}{4} & \text{dla } x \in \overline{U_{(1)}} = \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right] \end{cases}$$

Funkcja Cantora

Funkcja Cantora jest ważnym przykładem funkcji o specjalnych własnościach. Można ją zdefiniować indukcyjnie.

Funkcja Cantora $f\colon [0,1] \to [0,1]$ powstaje przez jednostajne przybliżenie przez ciąg funkcji $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$, których wykresami są linie łamane oraz $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$.

- Funkcja f_0 jest identycznością, tzn. $f_0(x) = x$ dla $x \in [0,1]$.
- Funkcja f_1 jest równa $\frac{1}{2}$ na przedziale $\overline{U} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ oraz jest liniowa na przedziałach $P_{(0)}$ i $P_{(1)}$.
- Funkcję f_2 określamy poniższym wzorem i rozszerzamy ją liniowo;

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } x \in \overline{U} \\ \frac{1}{4} & \text{dla } x \in \overline{U_{(0)}} = \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right] \\ \frac{3}{4} & \text{dla } x \in \overline{U_{(1)}} = \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right] \end{cases}$$

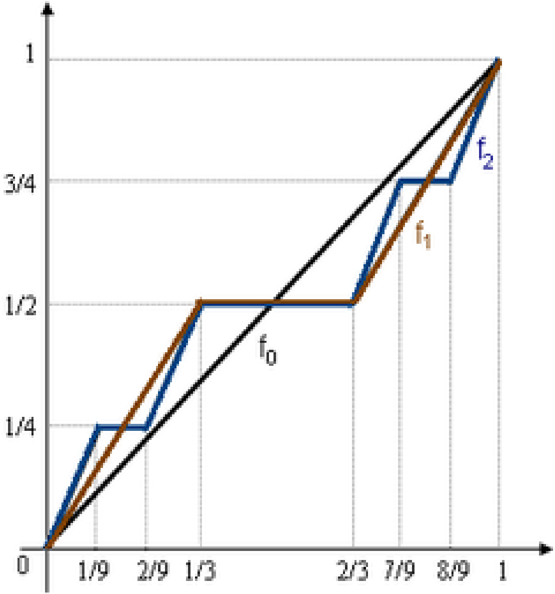
Funkcja Cantora

Funkcja Cantora jest ważnym przykładem funkcji o specjalnych własnościach. Można ją zdefiniować indukcyjnie.

Funkcja Cantora $f\colon [0,1] \to [0,1]$ powstaje przez jednostajne przybliżenie przez ciąg funkcji $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$, których wykresami są linie łamane oraz $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$.

- Funkcja f_0 jest identycznością, tzn. $f_0(x) = x$ dla $x \in [0,1]$.
- Funkcja f_1 jest równa $\frac{1}{2}$ na przedziale $\overline{U} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ oraz jest liniowa na przedziałach $P_{(0)}$ i $P_{(1)}$.
- Funkcję f_2 określamy poniższym wzorem i rozszerzamy ją liniowo;

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } x \in \overline{U} \\ \frac{1}{4} & \text{dla } x \in \overline{U_{(0)}} = \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right] \\ \frac{3}{4} & \text{dla } x \in \overline{U_{(1)}} = \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right] \end{cases}$$


1
3/4
1/2
1/4
0
1/9
2/9
1/3
2/3
7/9
8/9
1
f2
f1
f0

Kolejne funkcje f_n określamy według podobnego schematu.

Definicja

Funkcja Cantora dana jest wzorem

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in [0,1].$$

Własności:

- Jest ona ciągła i niemalejąca na $[0,1]$.
- Jest stała na każdej składowej dopełnienia zbioru Cantora.
- Jest ściśle rosnąca na zbiorze C i przekształca zbiór C na cały przedział $[0,1]$.

Ze względu na swój wykres funkcja Cantora nazywa się diabelskimi schodami.

Kolejne funkcje f_n określamy według podobnego schematu.

Definicja

Funkcja Cantora dana jest wzorem

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in [0,1].$$

Własności:

- Jest ona ciągła i niemalejąca na $[0,1]$.
- Jest stała na każdej składowej dopełnienia zbioru Cantora.
- Jest ściśle rosnąca na zbiorze C i przekształca zbiór C na cały przedział $[0,1]$.

Ze względu na swój wykres funkcja Cantora nazywa się diabelskimi schodami.

Kolejne funkcje f_n określamy według podobnego schematu.

Definicja

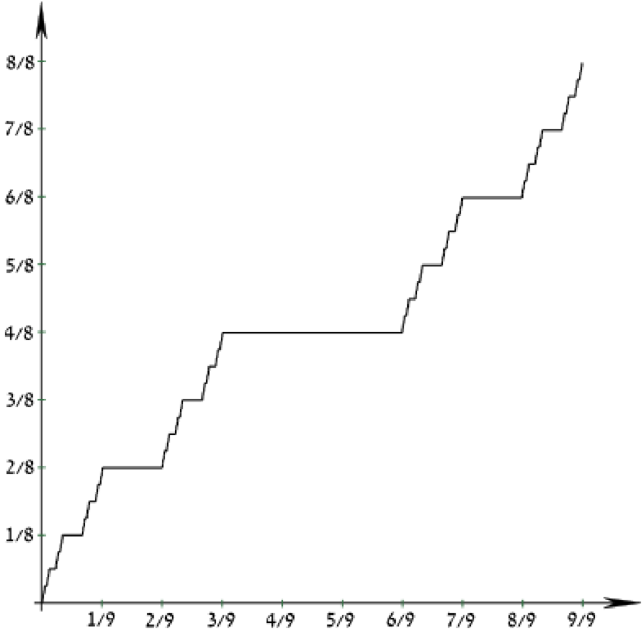
Funkcja Cantora dana jest wzorem

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in [0,1].$$

Własności:

- Jest ona ciągła i niemalejąca na $[0,1]$.
- Jest stała na każdej składowej dopełnienia zbioru Cantora.
- Jest ściśle rosnąca na zbiorze C i przekształca zbiór C na cały przedział $[0,1]$.

Ze względu na swój wykres funkcja Cantora nazywa się diabelskimi schodami.


8/8
7/8
6/8
5/8
4/8
3/8
2/8
1/8
1/9
2/9
3/9
4/9
5/9
6/9
7/9
8/9
9/9

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ