

Zadanie. Zbudujmy zmodyfikowany zbiór Cantora.

W kroku 1 usuwamy współśrodkowy z $[0, 1]$ przedział otwarty U o długości $\frac{1}{4}$. Po lewej i prawej stronie pozostają przedziały domknięte $P_{(0)}$ oraz $P_{(1)}$ równej długości.

W kroku 2 z każdego z tych przedziałów domkniętych $P_{(i)}$ ($i = 0, 1$) usuwamy współśrodkowy przedział otwarty $U_{(i)}$ o długości $\frac{1}{4^2}$. Po lewej i prawej stronie pozostają przedziały domknięte $P_{(i,0)}$ oraz $P_{(i,1)}$ tej samej długości. Następnie w każdym z nich usuwamy odpowiedni przedział współśrodkowy otwarty $U_{(i,0)}$ oraz $U_{(i,1)}$ o długości $\frac{1}{4^3}$.

Dalej kontynuujemy konstrukcję indukcyjną w nieskończoność. Otrzymujemy rodziny przedziałów domkniętych $P_{(s_1, \dots, s_n)}$ i otwartych $U_{(s_1, \dots, s_n)}$, gdzie (s_1, \dots, s_n) przebiega wszystkie ciągi zer i jedynek o dowolnej długości $n \in \mathbb{N}$.

Definiujemy zmodyfikowany zbiór Cantora wzorem

$$C^* = [0, 1] \setminus (U \cup U_{(0)} \cup U_{(1)} \cup U_{(0,0)} \cup U_{(0,1)} \cup \dots).$$

Obliczyć miarę $|C^*|$ zbioru C^* .

Wskazówka. Zastosować wzór na sumę odpowiedniego ciągu geometrycznego.