Co sie zadziało nowego w krainie funkcji trójkatnych Pálesa i Bessenyeiego?

Filip Turoboś

03.04.24

Abstract W 2017 Bessenyei i Páles wprowadzili pojecie funkcji trójkatnej dla przestrzeni semimetrycznej (X, d). Jest to odwzorowanie $\Phi : \mathbb{R}_+^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ spełniajace warunki:

- $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}_+$;
- $\Phi(x, y) \leq \Phi(s, t)$ dla wszystkich $x, y, s, t \in \mathbb{R}_+$ takich, że $x \leqslant s$, $y \leqslant t$;
- $\Phi(0, 0) = 0$;
- $d(x, z) \leq \Phi(d(x, y), d(y, z))$ dla wszystkich $x, y, z \in X$;

W każdej przestrzeni semimetrycznej można zdefiniować optymalna funkcje trójkatna w bardzo naturalny sposób:

$$\forall_{u,v\in\mathbb{R}_+} \qquad \Phi(u, v) := \sup\{d(x, z) : \exists_{y\in X} d(x, y) \leqslant u \ \wedge \ d(y, z) \leqslant v\}.$$

Regularne przestrzenie semimetryczne definiowane sa jako te, w których optymalna funkcja trójkatna jest ciagła w punkcie $(0, 0)$ i stanowia interesujacy obiekt badawczy, wokół którego narosło już nieco wyników. Rezultaty, które przedstawie w trakcie referatu beda stanowić pewnego rodzaju modyfikacje znanych już twierdzeń i dowodów, z wykorzystaniem nowych narzedzi. Skupimy sie przede wszystkim na twierdzeniu Banacha o punkcie stałym i jego wariantach.

References

1. Bessenyei, M., Páles, Z. (2017). The contraction principle in semimetric spaces. J. Nonlinear Convex Anal., 18(3), 515-524.
2. Chrzaszcz, K., Jachymski, J., Turoboś, F. (2018). On characterizations and topology of regular semimetric spaces. Publ. Math. Debrecen, 93(1-2):87–105
3. Jachymski J., Turoboś, F. (2020) On functions preserving regular semimetrics and quasimetrics satisfying the relaxed polygonal inequality. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fìs. Nat. Ser. A Mat. RACSAM, 114(3):Paper No. 159, 11

Filip Turoboś
Institute of Mathematics, Faculty of Lodz University of Technology, Lodz, Poland E-mail: filip.turobos@p.lodz.pl