Wokół twierdzenia o szeregu Neumanna

Tytułowe twierdzenie podaje warunek dostateczny na to, by równanie postaci

$$x - Tx = y$$

miało dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnego $y \in X$, gdzie X jest przestrzenią Banacha, zaś $T\colon X \to X$ operatorem liniowym i ciągłym. Ponadto wiadomo, że rozwiązanie to jest sumą szeregu iteracji operatora T w punkcie y (szereg Neumanna). Ten rezultat jest uogólnieniem twierdzenia o sumie szeregu geometrycznego. Pokażę dość zaskakujący (przynajmniej dla mnie) fakt, że z twierdzenia o szeregu Neumanna można też otrzymać wzór na rozwinięcie funkcji wykładniczej w szereg potęgowy. Ponadto zaprezentuję uogólnienie twierdzenia Neumanna, w którym pojawi się nieskończony ciąg (T_n) operatorów zbieżny punktowo do T, a we wzorze na rozwiązanie powyższego równania będą użyte złożenia postaci $T_n \circ \cdots \circ T_1$ zamiast iterat T^n. W szczególności można stąd otrzymać pewne uogólnienie wzoru na sumę szeregu geometrycznego.