Uogólnienie pewnego problemu Alzera i Matkowskiego

Marta Pierzchałka, Gabriela Smejda

27 stycznia 2025

Referat będzie dotyczył badanego przez nas uogólnienia problemu postawionego przez Alzera i Matkowskiego w ich niedawnym artykule [1]. Wyznaczali oni funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(x+y) = f(x)f(y) - \alpha xy,$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, a α jest niezerową liczbą rzeczywistą. Autorzy artykułu wyznaczyli je przy założeniu, że f jest różniczkowalna przynajmniej w jednym punkcie lub, że posiada miejsce zerowe. Wraz z Włodzimierzem Fechnerem wykazałyśmy, że założenie to nie jest konieczne. Badaliśmy również uogólnienie powyższego problemu - równanie

$$f(x+y) = f(x)f(y) - \phi(x,y),$$

gdzie X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $f\colon X \to \mathbb{K}$, natomiast $\phi\colon X \times X \to \mathbb{K}$ jest funkcjonałem biaddytywnym. Udało nam zbadać, kiedy powyższe równanie ma rozwiązania i je wyznaczyć w zależności od zachowania funkcjonału ϕ na przekątnej. Wykazaliśmy, że w przypadku istnienia rozwiązań funkcjonał ϕ jest postaci

$$\phi(x,y) = MF(x)F(y)$$

dla pewnej stałej $M > 0$ i addytywnego, niezerowego funkcjonału $F\colon X \to \mathbb{K}$. Z tego uogólnionego równania wynikło w szczególności rozwiązanie oryginalnego problemu postawionego przez Alzera i Matkowskiego.

Uzyskane wyniki są umieszczone jako preprint [2] na platformie arXiv.

Literatura

[1] Horst Alzer and Janusz Matkowski, *Bilinearity of the Cauchy exponential difference*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **(online first)** (2025).

[2] Włodzimierz Fechner, Marta Pierzchałka, and Gabriela Smejda, *On a generalized conjecture by Alzer and Matkowski*, arXiv:2412.14756v2.